Ueber

eine bemerkenswerte Raumkurve

fünfter Ordnung.

Zur Erlangung der Doktorwürde

eingereicht bei der 2. Sektion der philosophischen Fakultät der Ludwigs-Maximiliansuniversität

München

von

Alfons Schmitz

K. Studienlehrer in Neuburg a. D.

Neuburg a. D.

Griessmayersche Buchdruckerei.

1886

§ 1.

Einleitung.

Reye behandelt im 21. Vortrage der 2. Abteilung seiner Geometrie der Lage*) einen speziellen Tetraederkomplex, welcher durch die Geraden gebildet wird, die auf ihren Polargeraden hinsichtlich einer F_2 senkrecht stehen. Reye nennt die Geraden dieses Komplexes „Axen der F_2“ und zeigt, dass sie nichts anderes sind als die Lote von allen Punkten auf ihre Polarebenen. Der 23. Vortrag des erwähnten Werkes beschäftigt sich dann weiter mit den Fusspunkten der Axen, d. h. ihren Durchschnittspunkten mit den zugehörigen Polarebenen. Dabei wird im Verlaufe des Vortrages der Satz ausgesprochen: „die Fusspunkte aller durch einen beliebigen Punkt P gehenden Axen liegen auf einer Raumkurve, welche aus P durch eine Kegelfläche zweiter Ordnung projiziert wird . . . . . den Beweis, dass diese Kurve von der 5. Ordnung ist, muss ich der Kürze wegen unterdrücken“. — Im weiteren Verlaufe definiert Reye jene Flächen als konfokale, welche denselben Achsenkomplex und dieselben Axenfusspunkte besitzen**). Ist nun φ eine Fläche der konfokalen Schar und a eine Normale von P an φ, α ihr Schnittpunkt mit φ, A die Tangentialebene in α an φ, so ist α Pol von A und a die zu A gehörige Axe bezüglich φ und somit bezüglich aller Flächen der konfokalen Schar.

Also gehören alle Normalen von P an die Flächen der konfokalen Schar zum Axenkomplex derselben. Daraus ergibt sich, wie auch Reye des weiteren (Seite 190) erwähnt, dass der Ort der Fusspunkte der durch P gehenden Axen einer F_2 zugleich Ort der Fusspunkte der durch P an die Schar der zu F_2 Konfokalen gelegten Normalen ist.

Diese Raumkurve, welche im Folgenden genauer untersucht werden soll, hat Darboux gelegentlich der Diskussion einer Fläche

---

*) Zweite Auflage, Hannover, Karl Rümpler, 1880.

**) Wenn man von der Definition der konfokalen Flächen, wie sie die analytische Geometrie aufstellt, ausgeht, so findet sich, (vide z. B. Salmon-Fiedler, analytische Geometrie des Raumes, 1. Teil, 3. Aufl., Nr. 167) dass alle Pole einer Ebene A bezüglich einer Schar konfokaler Flächen φ in einem Lote zu dieser Ebene liegen. Sind nun a_1 und a_2 die Pole von A bezüglich φ_1 und φ_2, so ist für die beiden Flächen a_1a_2 das Lot vom Pol auf die Polare, d. h. eine Axe, und der Schnittpunkt α von a_1a_2 mit A ist für beide Flächen Axenfusspunkt.

5. Ordnung, deren Doppelkurve sie ist, bereits kurz erwähnt und ihre Gleichung aufgestellt*).

§ 2.

Gleichungen der Kurve.

Da wir wissen, dass Axenkomplex und Fusspunkte für jede Fläche der konfokalen Schar dieselben sind, so wählen wir zur Bildung der nötigen Gleichungen diejenige Fläche, deren Parameter o ist und die demzufolge die einfachste Gleichung hat.

Sei ferner P der Anfang der Koordinaten und seien die Koordinatenebenen parallel zu den Symmetrieebenen der F_2 gewählt, so ist deren Gleichung:

$$U \equiv a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = o$$

Die Polarebene eines Punktes α, β, γ, ist:

$$(a_{11}\alpha + a_{14})x + (a_{22}\beta + a_{24})y + (a_{33}\gamma + a_{34})z + a_{14}\alpha + a_{24}\beta + a_{34}\gamma + a_{44} = o$$

Die Senkrechte durch den Pol auf die Polarebene ist:

$$\frac{x - \alpha}{a_{11}\alpha + a_{14}} = \frac{y - \beta}{a_{22}\beta + a_{24}} = \frac{z - \gamma}{a_{33}\gamma + a_{34}}$$

Damit diese Gerade durch den Anfang P gehe, muss sein:

$$\lambda\alpha = a_{11}\alpha + a_{14}; \quad \lambda\beta = a_{22}\beta + a_{24}; \quad \lambda\gamma = a_{33}\gamma + a_{34}$$

$$\alpha = \frac{a_{14}}{\lambda - a_{11}}; \quad \beta = \frac{a_{24}}{\lambda - a_{22}}; \quad \gamma = \frac{a_{34}}{\lambda - a_{33}}$$

Daraus erhalten wir für die Polarebenen und ihre Axen die Gleichungen:

$$\frac{\lambda a_{14}}{\lambda - a_{11}}x + \frac{\lambda a_{24}}{\lambda - a_{22}}y + \frac{\lambda a_{34}}{\lambda - a_{33}}z + \frac{a^2_{14}}{\lambda - a_{11}} + \frac{a^2_{24}}{\lambda - a_{22}} + \frac{a^2_{34}}{\lambda - a_{33}} + a_{44} = o$$

$$\frac{\lambda - a_{11}}{\lambda a_{14}}x = \frac{\lambda - a_{22}}{\lambda a_{24}}y = \frac{\lambda - a_{33}}{\lambda a_{34}}z$$

*) bulletin des sciences mathématiques, t. 2, 1871, pag. 40.

Aus dem Gleichungssysteme

$$px + qy + rz = -s$$

$$\frac{x}{p} - \frac{y}{q} = o \quad \text{folgt:} \quad \begin{cases} x = \dfrac{-sp}{p^2+q^2+r^2} \\ y = \dfrac{-sq}{p^2+q^2+r^2} \\ z = \dfrac{-sr}{p^2+q^2+r^2} \end{cases}$$

$$\frac{x}{p} - \frac{z}{r} = o$$

Schreiben wir zur Abkürzung $ii \equiv \lambda - a_{ii}$, so erhalten wir demzufolge als Gleichungen unserer Kurve:

$$-x = \frac{a_{14} \cdot 22 \cdot 33}{\lambda} \times \frac{a_{44} \cdot 11 \cdot 22 \cdot 33 + \Sigma\, a_{14}^2 \cdot 22 \cdot 33}{\Sigma\, a_{14}^2 \cdot 22^2 \cdot 33^2}$$

$$-y = \frac{a_{24} \cdot 11 \cdot 33}{\lambda} \times \varphi(\lambda)$$

$$-z = \frac{a_{44} \cdot 11 \cdot 22}{\lambda} \times \varphi(\lambda)$$ wobei $\varphi(\lambda)$ den gemeinsamen Faktor von x, y und z bedeutet.

Unsere Kurve gehört also zu den unikursalen;*) sie ist vom Geschlechte Null; der Anfangspunkt der Koordinaten ist ein wirklicher dreifacher und ein scheinbarer vierfacher Punkt, welcher $\frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$ Doppelpunkten äquivalent ist. 6 ist zugleich die Maximalzahl der Doppelpunkte, welche eine Kurve 5. Ordnung haben kann, daher hat sie ausser dem Anfang keinen Doppelpunkt und keine Spitze mehr.

Aus den im Salmon**) angeführten Entwicklungen, so wie aus den Plücker-Cayley'schen Gleichungen***) ergeben sich die Charaktere unserer Kurve:

Ordnung: 5
Klasse: 8
Zahl der scheinbaren Doppelpunkte: 6
Zahl der Spitzen: 0
Zahl der stationären Ebenen: 8
Klasse der oskulierenden Developpablen: 9

---

*) Die unikursalen ebenen Kurven werden behandelt von Clebsch in Crelle's Journal Nr. 64 Seite 44 und 210; die unikursalen Raumkurven bespricht Korndörfer in den mathematischen Annalen Nr. 3 Seite 415; ferner erwähnt Salmon-Fiedler, Raumgeometrie Seite 111 des 2. Teiles 3. Auflage, wie die Charaktere rationaler Raumkurven durch das Prinzip der eindeutigen algebraischen Korrespondenz geometrisch abgeleitet werden können.

**) Raumgeometrie 2. Teil, S. 111 und 145.

***) Cremona Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Oberflächen in synthetischer Behandlung. Berlin 1870, Seite 9—11.

Zahl der Geraden in einer Ebene, durch welche zwei Tangentenebenen an die Developpable gehen: 20
Zahl der Punkte in einer Ebene, durch welche 2 Generatrixen der Developpablen gehen; 16
Zahl der stationären Generatrixen: 0
Zahl der Ebenen durch einen Punkt, welche zwei nichtbenachbarte Tangenten der Kurve enthalten: 12.

§ 3.

Diskussion der Kurve aus ihren Gleichungen.

Es ist also gegeben:

1.) $-x = \frac{a_{14} \cdot 22 \cdot 33}{\lambda} \cdot \frac{f}{\varphi}$

2.) $-y = \frac{a_{24} \cdot 11 \cdot 22}{\lambda} \cdot \frac{f}{\varphi}$ $\quad \frac{f}{\varphi} \equiv \frac{a_{44} \cdot 11 \cdot 22 \cdot 33 + \Sigma a^2_{14} \cdot 22 \cdot 33}{\Sigma a^2_{14} 22^2 33^2}$

3.) $-z = \frac{a_{34} \cdot 11 \cdot 22}{\lambda} \cdot \frac{f}{\varphi}$

Die Funktion f hat stets 3 reelle Wurzeln, denn sei $a_{33} < a_{22} < a_{11}$ (mit Berücksichtigung des Vorzeichens dieser Grössen) und ε eine unendlich kleine Grösse; sei ferner

$$f \equiv 11 \cdot 22 \cdot 33\, w$$

oder $$w = a_{44} + \frac{a^2_{14}}{\lambda - a_{11}} + \frac{a^2_{24}}{\lambda - a_{22}} + \frac{a^2_{34}}{\lambda - a_{33}}$$

so erhalten wir folgende zusammengehörige Werte von λ und w:

für λ gleich $a_{33} - \varepsilon$ wird w negat. (denn $\frac{a^2_{34}}{-\varepsilon}$ absol. grösstes Glied)

„ a_{33} „ $\frac{-}{+}\infty$

„ $a_{33} + \varepsilon$ „ positiv (denn $\frac{a^2_{34}}{+\varepsilon}$ absol. grösstes Glied)

„ $a_{33} + m$ „ Null

„ $a_{22} - \varepsilon$ „ negativ

„ a_{22} „ $\frac{-}{+}\infty$

„ $a_{22} + \varepsilon$ „ positiv

„ $a_{22} + n$ „ Null

„ $a_{11} - \varepsilon$ „ negativ

„ a_{11} „ $\frac{-}{+}\infty$

„ $a_{11} + \varepsilon$ „ positiv

∞ erhält w das Vorzeichen von a_{44}

Also muss w noch eine dritte Wurzel entweder grösser als a_{11} oder kleiner als a_{33} besitzen. f hat die nämlichen Wurzeln wie w, weil $11 \,.\, 22 \,.\, 33 \,.\, w$ zu Null wird, wenn w zu Null wird. (Für $11 = 0$ ist $w = \infty$, daher $11 \,.\, w$ von Null verschieden etc.) Es liegen also die stets reellen Wurzeln von f so, dass sie durch a_{33}, a_{22}, a_{11}, von einander getrennt werden.

Daraus ergibt sich, dass der Anfangspunkt P ein reeller dreifacher Punkt der Kurve*) ist und weil derselbe in bezug auf die F_2, welche unserer Aufgabe zu Grunde liegt, ganz willkürlich ist, so ergibt sich zugleich, dass jeder Punkt im Raume Fusspunkt von 3 Axen ist*). Der Axenkegel, auf welchem unsere Kurve liegt, wird aus den Gleichungen

$$4.) \quad \frac{\lambda - a_{11}}{a_{14}} x = \frac{\lambda - a_{22}}{a_{24}} y = \frac{\lambda - a_{33}}{a_{34}} z$$

des vorigen Paragraphen durch Elimination von λ gefunden:

$$a_{34}(a_{11} - a_{22})xy + a_{14}(a_{22} - a_{33})yz + a_{24}(a_{33} - a_{11})zx = 0$$

Betrachten wir die Tangenten der Kurve im Anfangspunkte.

Legen wir in 4.) dem λ alle möglichen Werte bei, so erhalten wir alle Geraden (= alle Axen) durch den Anfang, welche unsere Kurve ausserhalb des Anfangs nochmals schneiden, ferner erhalten wir jeden Schnittpunkt, wenn wir den jeweiligen Wert von λ in die Gleichungen 1—3 einsetzen.

Lassen wir λ alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen, so fällt dieser Punkt so oft mit dem Anfange zusammen, als λ einen Wurzelwert von f erhält. Daher bekommen wir die Gleichungen der 3 Tangenten im Anfange, wenn wir in den Gleichungen (4.) für λ je eine Wurzel von $f = 0$ einsetzen. Der Winkel dieser Tangenten muss nach Reye*) ein rechter sein.

Analytisch zeigt sich dies folgendermassen:

Sind λ_1 und λ_2 zwei Wurzeln von f, so ist:

$$\frac{a_{14}^2}{\lambda_1 - a_{11}} + \frac{a_{24}^2}{\lambda_1 - a_{22}} + \frac{a_{34}^2}{\lambda_1 - a_{33}} + a_{44} = 0$$

$$\frac{a_{14}^2}{\lambda_2 - a_{11}} + \frac{a_{24}^2}{\lambda_2 - a_{22}} + \frac{a_{34}^2}{\lambda_2 - a_{33}} + a_{44} = 0$$

Durch Subtraktion und Vereinigung der untereinander stehenden Glieder folgt:

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \left\{ \frac{a_{14}^2}{(\lambda_1 - a_{11})(\lambda_2 - a_{11})} + \frac{a_{24}^2}{(\lambda_1 - a_{22})(\lambda_2 - a_{22})} + \frac{a_{34}^2}{(\lambda_1 - a_{33})(\lambda_2 - a_{33})} \right\} = 0$$

wobei $\lambda_1 - \lambda_2$ von Null verschieden ist.

*) Reye Seite 181, 183.

Die Bedingung aber, dass die Geraden:

$$\frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{14}} x = \frac{\lambda_1 - a_{22}}{a_{24}} y = \frac{\lambda_1 - a_{33}}{a_{34}} z$$

und $\frac{\lambda_2 - a_{11}}{a_{14}} y = \frac{\lambda_2 - a_{22}}{a_{24}} y = \frac{\lambda_2 - a_{33}}{a_{34}} z$ auf einander senkrecht stehen, ist:

$$\frac{a_{14}}{\lambda_1 - a_{11}} \cdot \frac{a_{14}}{\lambda_2 - a_{11}} + \frac{a_{24}}{\lambda_1 - a_{22}} \cdot \frac{a_{24}}{\lambda_2 - a_{22}} + \frac{a_{34}}{\lambda_1 - a_{33}} \cdot \frac{a_{34}}{\lambda_2 - a_{33}} = 0$$

und diese ist, wie wir oben sahen, thatsächlich erfüllt, wenn λ_1 und λ_2 Wurzeln von f sind.

Also stehen alle 3 Tangenten im Anfange auf einander senkrecht, jeder Punkt im Raum ist Fusspunkt von 3 zu einander senkrechten Axen.

Die Kurve hat nur einen unendlich fernen Punkt für $\lambda = o$. Die Axe durch denselben ist:

$$\frac{a_{11}}{a_{14}} x = \frac{a_{22}}{a_{24}} y = \frac{a_{33}}{a_{34}} z$$

Dieselbe geht durch den Pol der unendlich fernen Ebene, $x = -\frac{a_{14}}{a_{11}}$ $y = -\frac{a_{24}}{a_{22}}$ $z = -\frac{a_{34}}{a_{33}}$, welcher das Zentrum der F_2 ist.

Betrachten wir die Schnittpunkte der Koordinaten-Ebenen und Koordinaten-Axen mit der Kurve.

Die Ebene $x = o$ schneidet die Kurve in den Punkten

$$x = o,\ z = o,\ y = -\frac{a_{24}}{a_{22}} \quad (\lambda = a_{22})$$

$$x = o,\ z = o,\ z = -\frac{a_{34}}{a_{33}} \quad (\lambda = a_{33})$$

(und ausserdem noch dreimal im Anfange.)

Ebenso folgt, dass auch $y = o,\ z = o,\ x = -\frac{a_{14}}{a_{11}}$ $(\lambda = a_{11})$ ein Kurvenpunkt ist.

Also sind auch die drei zu den Hauptaxen der F_2 parallelen Geraden Axen der Fläche und es folgt, dass jede Senkrechte auf eine Symmetrieebene eine Axe der F_2 und ihr Durchschnitt mit der Symmetrieebene ihr Fusspunkt ist. Dies erhellt geometrisch aus den Eigenschaften des Tetraederkomplexes, sowie daraus, dass eine Senkrechte auf eine Symmetrieebene durch deren (unendlich fernen) Pol geht.

Erwähnen wir nun weiter die Durchschnitte der Symmetrieebenen mit der Kurve.

Die Symmetrieebene parallel zur YZ Ebene hat die Gleichung $a_{11}x + a_{14} = o$

Setzen wir den Wert für x aus der Kurvengleichung 1.) ein, so erhalten wir:

$$a_{11}a_{14} \cdot 22 \cdot 23 \cdot (11 \cdot 22 \cdot 33 + \Sigma a^2_{14}\, 22 \cdot 33) - a_{14}\,\lambda \Sigma a^2_{14} \cdot 22^2 \cdot 33^2 = o$$

Diese Gleichung hat 5 Wurzeln λ, durch deren Einsetzung in die Gleichungen 1—3 man die 5 Schnittpunkte der Kurve mit der Ebene erhält.

Eine dieser Wurzeln ist $\lambda - a_{11} = o$ die anderen enthält der Ausdruck:

$$(a_{44}\, a_{11} - a^2_{14})\, 22^2 \cdot 33^2 + a_{11}\, a^2_{24} \cdot 22 \cdot 33^2 + a_{11}\, a^2_{34}\, 22^2\, 33 - 11 \cdot \lambda (a^2_{24}\, 33^2 + a^2_{34}\, 22^2) = o$$

Sei α einer dieser 4 Punkte und a die zugehörige Axe, so gibt es durch α eine F_2 der konfokalen Schar, deren Tangentenebene in α senkrecht auf a steht, aber auch senkrecht auf der Symmetrieebene stehen müsste, weil alle konfokalen Flächen die (gemeinsamen) Symmetrieebenen senkrecht durchschneiden. Daher können diese Punkte nicht auf einer wirklichen Fläche der Schar, sondern sie müssen auf einem Fokalkegelschnitte liegen*). Eine Ausnahme macht nur derjenige Punkt, in welchem die Symmetrieebene von der zu ihr senkrechten Koordinaten-Axe geschnitten wird, für diesen Punkt ist die Symmetrieebene selbst die durch ihn hindurchgehende Fläche der konfokalen Schar.

Also folgt:

Jede Symmetrieebene wird von unserer Kurve in der zu ihr senkrechten Koordinatenaxe und in vier Punkten der Fokalkurve getroffen.

Wir wollen jetzt noch einiges über die Auffindung der Asymptotengleichungen angeben.

Sei $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = o$ irgend eine Ebene, so erhält man durch Einsetzung der Ausdrücke für x, y, z die Schnittpunkte der Kurve mit der Ebene bestimmt durch eine Gleichung

$$b_0\lambda^5 + b_1\lambda^4 + b_2\lambda^3 + b_3\lambda^2 + b_4\lambda + b_5 = o$$

Dabei sind die b homogene lineare Funktionen von α, β, γ, δ; z. B. findet sich:

$$b_0 \equiv a_{44}\, a_{14}\, \alpha + a_{44}\, a_{24}\, \beta + a_{44}\, a_{34}\, \gamma - \Sigma a^2_{14} \cdot \delta$$

$$b_4 \equiv a_{14}\, \alpha ([a_{22} + a_{33}]\, m + a_{22}\, a_{33}\, n) + a_{24}\, \beta ([a_{11} + a_{33}]\, m + a_{11}\, a_{33}\, n) + a_{34}\, \gamma ([a_{11} + a_{22}]\, m + a_{11}\, a_{22}\, n) - \delta\, \Sigma a^2_{14}\, a^2_{22}\, a^2_{33}$$

*) Ueber die Bedeutung der Fokalkurven im Komplexe siehe § 5 und 6.

$$b_5 \equiv \left[\frac{a_{14}}{a_{11}}\alpha + \frac{a_{24}}{a_{22}}\beta + \frac{a_{34}}{a_{33}}\gamma\right] \cdot a_{11}\, a_{22}\, a_{33}\, m$$

Ferner $m \equiv a_{44}\, a_{11}\, a_{22}\, a_{33} - \Sigma a^2_{14}\, a_{22}\, a_{33}$

$$n \equiv a_{44} \cdot \Sigma a_{11}\, a_{22} - \Sigma a^2_{14}(a_{22} + a_{33})$$

Wenn nun eine Ebene im Punkte $\lambda = o$ dreipunktig berührt, und ihre anderen zwei Schnittpunkte durch $\lambda^2 + r\lambda + s$ bestimmt sind, so muss sein:

$$\lambda^5 + r\lambda^4 + s\lambda^3 \equiv b_0\lambda^5 + b_1\lambda^4 + b_2\lambda^3\, b_3\lambda^2 + b_4\lambda + b_5$$

Also ergibt sich α, β, γ, δ aus:

$$b_0 = 1 \quad b_3 = o \quad b_4 = o \quad b_5 = o$$

Oder es ist auch die Gleichung der Asymptotenebene die gleich Null gesetzte Determinante des Systems $x\alpha + y\beta + z\gamma + \delta = o$

$$b_3 = o \quad b_4 = o \quad b_5 = o$$

Die Punkte der Asymptotenebene erfüllen die Relationen:

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = o$$

$$\text{und } b_5 \equiv \alpha\frac{a_{14}}{a_{11}} + \beta\frac{a_{24}}{a_{22}} + \gamma\frac{a_{34}}{a_{33}} = o$$

Daher kann ihre Gleichung in die Form gebracht werden:

$$\alpha\left(x + \frac{a_{14}}{a_{11}}\right) + \beta\left(y + \frac{a_{24}}{a_{22}}\right) + \gamma\left(z + \frac{a_{34}}{a_{33}}\right) + \delta = o$$

Daraus folgt, dass die Asymptotenebene zur Verbindungslinie des Anfangs mit dem Zentrum der Flächen parallel ist.

Setzt man $\gamma = o$, so erhält man durch Elimination von α, β, δ aus $\alpha x + \beta y + \delta = o$, $b_4 = o$, $b_5 = o$ die Gleichung der durch die Asymptote gelegten Lotebene auf die XY Ebene, in anologer Weise findet man die übrigen Projektionen der Asymptote auf die Koordinatenebenen.

Nun können wir den Verlauf der Kurve etwas genauer verfolgen.

Da dieselbe keine Unterbrechung der Stetigkeit, ausserhalb des Anfangs keinen vielfachen Punkt und nur einen unendlich fernen Punkt besitzt, so muss sie um den Anfang zwei Schleifen bilden, die einander ausserhalb des Anfangs nicht schneiden; die drei Zweige der Schleifen durchschneiden im Anfangspunkte einander rechtwinklig. Da die drei Koordinaten für $\lambda = -\varepsilon$ und $\lambda = +\varepsilon$ verschiedene Vorzeichen haben, so erstrecken sich die Zweige der Kurve in 2 Scheiteloktanten ins Unendliche. Während λ aus $+\infty$ in $-\infty$ übergeht, bleibt die Kurve stetig im Endlichen in irgend einem Oktanten.

Die drei Punkte λ_1, λ_2, λ_3, für $f(\lambda) = o$, welche im Anfange liegen und die drei Punkte $\lambda = a_{11}$, $x = a$, $y = z = o$; $\lambda = a_{22}$ $y = b$ $z = x = o$; $\lambda = a_{33}$, $z = c$, $x = y = o$ trennen ein-

ander und jede Koordinate ändert beim Durchgange durch Null ihr Zeichen. Nennen wir P die drei Punkte im Anfange und p die drei Punkte a_{11}, a_{22}, a_{33}, und ω den unendlich fernen Punkt der Kurve, so können wir diese 7 Punkte also anordnen:

P_1 p_1

ω Der im Endlichen gelegene Punkt $\lambda = \infty$

P_2 liegt entweder zwischen ω und P_1, oder

p_3 zwischen ω und p_3

P_3 p_2

Wir wollen 4 Oktanten mit römischen und die Scheiteloktanten mit den entsprechenden arabischen Ziffern bezeichnen und annehmen, dass der die Kurve durchlaufende Punkt auf dem Wege von ω nach p_3 im Oktanten I laufe.

(Anmerkung. Die Oktanten und die Punkte p sind auf Figur I verzeichnet; von der Kurve selbst lässt sich kein anschauliches Bild entwerfen.)

Dann läuft der Punkt

von	ω	bis	p_3	in	I
bei	p_3	durch	Z	nach	III
„	P_3	„	O	„	3
„	p_2	„	Y	„	IV
„	P_2	„	O	„	4
„	p_1	„	X	„	I
„	P_1	„	O	„	1
„	ω	„	∞	„	I

Jede Schleife liegt in 2 Oktanten und schneidet eine Koordinaten Axe; zwei Oktanten enthalten keinen Teil der Kurve, ein Oktant wird zweimal, die übrigen werden je einmal von ihr durchzogen.

Nun betrachten wir die speziellen Fälle a) für die Lage des Punktes P, b) für die besonderen Formen der F_2.

I. Liegt O auf der F_2, so ist $a_{44} = 0$; in diesem Falle finden keine Besonderheiten statt; es hat die Funktion f eine Wurzel $\lambda = \infty$, die anderen zwei Wurzeln hängen von einer quadratischen Gleichung ab, daher vereinfachen sich jene Formeln, welche von a_{44} oder einer Wurzel von f abhängen. So werden z. B. die Gleichungen der Tangente im Anfange an jenem Zweig, für welchen $\lambda = \infty$ ist:

$$\frac{x}{a_{14}} = \frac{y}{a_{24}} = \frac{z}{a_{34}}$$

II. Wenn P in einer Symmetrieebene liegt, so ist z. B. $a_{34} = o$ (wenn nämlich die XY Ebene diese Symmetrieebene ist) dann wird $z = o$, die Kurve liegt ganz in der XY Ebene. Dies ist auch geometrisch evident. Denn jeder Komplexkegel, dessen Spitze in einer Hauptebene seines Tetraederkomplexes liegt, zerfällt in zwei Strahlenbüschel erster Ordnung, von denen das eine in der Hauptebene liegt, und die Ebene des zweiten durch den der Hauptebene gegenüberliegenden Hauptpunkt geht. Wenn aber Axen in einer Ebene liegen, so müssen auch deren Fusspunkte in dieser Ebene enthalten sein.

Es wird also $z \equiv o$ und die Gleichungen für x und y verwandeln sich durch Reduktion mit $(\lambda - a_{33})^2$ in:

$$-x = \frac{a_{14}(\lambda - a_{22})}{\lambda} \times \frac{a_{44}(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) + a^2_{14}(\lambda - a_{22}) + a^2_{24}(\lambda - a_{11})}{a^2_{14}(\lambda - a_{22})^2 + a^2_{24}(\lambda - a_{11})^2}$$

$$-y = \frac{a_{24}(\lambda - a_{11})}{\lambda} \times \frac{v}{w}$$

Diese Kurve 3. Ordnung hat einen Doppelpunkt im Anfange, ist von der 4. Klasse, hat 3 Inflexionspunkte und einen unendlich fernen.

Die Tangenten im Anfange erhalten wir, wenn wir in den Gleichungen des allgemeinen Falles z und a_{34} gleich Null setzen: (vide Seite 7).

$$\frac{\lambda - a_{11}}{a_{14}} x = \frac{\lambda - a_{22}}{a_{24}} y \left(= \frac{\lambda - a_{33}}{a_{34}} z = \frac{o}{o} \right)$$

oder auch: $\frac{a_{24}}{\lambda - a_{22}} x = \frac{a_{14}}{\lambda - a_{11}} y$; dabei muss für λ eine Wurzel von

$$a_{14} + \frac{a^2_{14}}{\lambda - a_{11}} + \frac{a^2_{24}}{\lambda - a_{22}} = o$$

genommen werden.

Sind λ_1 und λ_2 diese zwei Wurzeln, so muss für die Orthogonalität der Tangenten die Bedingung erfüllt sein:

$$\frac{a^2_{14}}{(\lambda_1 - a_{11})(\lambda_2 - a_{11})} + \frac{a^2_{24}}{(\lambda_1 - a_{22})(\lambda_2 - a_{22})} = o$$

Dieses findet aber wirklich statt, wie sich durch Subtraktion der Gleichungen:

$$\frac{a^2_{14}}{\lambda_1 - a_{11}} + \frac{a^2_{24}}{\lambda_1 - a_{22}} + a_{44} = o$$

$$\frac{a^2_{14}}{\lambda_2 - a_{11}} + \frac{a^2_{24}}{\lambda_2 - a_{22}} + a_{44} = o$$

von einander ergibt.

Die Gleichung der Asymptote findet sich folgendermassen:

Die Gerade $\alpha x + \beta y + \delta = o$ schneidet unsere Kurve in den Punkten λ, welche durch die Wurzeln der Gleichung $b_0 \lambda^3 + b_1 \lambda^2 + b_2 \lambda + b_3 = o$ bestimmt sind. Dabei sind die b homogene lineare Funktionen von α, β, δ; z, B.:

$$b_3 \equiv \left(\frac{a_{14}}{a_{11}}\alpha + \frac{a_{24}}{a_{22}}\beta\right) a_{11}\, a_{22}\ m;$$

$$b_2 \equiv a_{14}\alpha(a_{22}\, n - m) + a_{24}\beta(a_{11}\, n - m) - \delta \,.\, \Sigma a^2_{14} a^2_{22}$$

$$m \equiv -a_{44} a_{11}\, a_{22} + \Sigma a^2_{14}\, a_{22}$$

$$n \equiv a_{44}(a_{11} + a_{22}) - \Sigma a^2_{14}$$

Für die Asymptote nun ist eine doppelte Wurzel $\lambda = o$ vorhanden, daher ist die Gleichung der Asymptote die gleich Null gesetzte Determinante des Systems:

$$\alpha x + \beta y + \delta = o; \quad b_3 = o, \quad b_2 = o$$

Die soeben betrachtete Kurve enthält nur die Fusspunkte jener Axen, welche in einer der beiden singulären Ebenen durch P, nämlich in der Symmetrieebene liegen; die Fusspunkte der Axen in der zweiten singulären Ebene durch P, (welche durch den unendlich fernen Pol der Symmetrieebene, nämlich den 4ten Hauptpunkt des Komplexes geht und daher auf der Symmetrieebene senkrecht steht,) finden wir durch eine von vorne beginnende Diskussion unseres speziellen Falles:

Für $a_{34} = o$ ist die Polarebene des Punktes α, β, γ:

$$4.)\ (a_{11}\alpha + a_{14})\, x + (a_{22}\beta + a_{24}) y + a_{33}\gamma z + a_{14}\alpha + a_{24}\beta + a_{44} = o$$

Die Axe durch α, β, γ ist:

$$5.)\ \frac{x - \alpha}{a_{11}\alpha + a_{14}} = \frac{y - \beta}{a_{22}\beta + a_{24}} = \frac{z - \gamma}{a_{33}\gamma}$$

und wenn diese Gerade durch den Anfang geht, so ist:

$$6.)\ \lambda\alpha = a_{11}\alpha + a_{14}; \quad \lambda\beta = a_{22}\beta + a_{24}; \quad \lambda\gamma = a_{33}\gamma$$

Die letzte der Gleichungen 6.) ist erfüllt für $\gamma = o$. Dann verschwindet in 4.) das Glied $a_{33}\gamma z$, in 5.) muss $\frac{z - \gamma}{a_{33}\gamma} = \frac{o}{o}$ und somit $z = o$ sein, und wir erhalten die bereits betrachtete Kurve in der XY Ebene.

Die Gleichung $\lambda\gamma = a_{33}\gamma$ ist auch erfüllt für $\lambda = a_{33}$, γ beliebig. Dann sind die Koordinaten der Pole, deren Axen durch den Anfang gehen:

$$\alpha = -\frac{a_{14}}{a_{33} - a_{11}}, \quad \beta = -\frac{a_{24}}{a_{33} - a_{22}}, \quad \gamma \text{ beliebig.}$$

Diese Pole liegen also alle in einer Parallelen zur Z Axe; daher liegen alle Axen und der gesuchte zweite Zweig der Fusspunktkurve in der Ebene, welche durch den Punkt P und die erwähnte Parallele bestimmt ist.

Wenn wir $\lambda = a_{33}$ setzen und die Werte aus 6) in 4.) und 5.) einführen, aber die kürzeren Bezeichnungen α und β beibehalten, so werden die Gleichungen unseres Kurvenzweiges:

7.) $\alpha x + \beta y + \gamma z + m = o$

$$m = \frac{a_{14}\,\alpha}{a_{33}} + \frac{a_{24}\,\beta}{a_{33}} + \frac{a_{44}}{a_{33}}$$

8.) $\frac{x}{\alpha} = \frac{z}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$

Setzen wir aus 8.) die Werte von y und γ in 7.) ein, so erhalten wir die Projektion der Kurve auf die XZ Ebene:

9.) $(\alpha^2 + \beta^2)\ x^2 + \alpha^2\ z^2 + \alpha m x = o$

Da die Kurve in der Ebene $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta}$ liegt, so wählen wir diese als neue XZ Ebene.

Dann verhält sich das neue X zum alten x wie:

$\frac{X}{x} = \frac{1}{\cos \mu}$ ferner ist:

$\text{tg. } \mu = \frac{y}{x} = \frac{\beta}{\alpha}$; daher:

$x = X \cos \mu = \frac{\alpha\ X}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}}$; setzen wir dies in 9.) ein, so erhalten wir die Gleichung der Kurve in ihrer Ebene:

$$X^2 + z^2 + \frac{m\ X}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}} = o$$

Also folgt:

Die Fusspunkte der Normalen an eine Schar konfokaler Flächen durch einen Punkt P einer Symmetrieebene verteilen sich:

1.) Auf eine Kurve 3. Ordnung in dieser Symmetrieebene, mit einem Doppelpunkt,

2.) Auf einen Kreis in einer Ebene senkrecht zu dieser Symmetrieebene; derselbe durchschneidet in P die Symmetrieebene senkrecht. (Wenn wir P als dreifachen Punkt der Gesamtkurve betrachten, so stehen auch in diesem speziellen Falle die 3 Tangenten in P auf einander senkrecht.)

III. Liegt P auf einer Hauptaxe der Flächen, wird also z. B. $a_{24} = a_{34} = o$, so werden die Gleichungen der unikursalen Kurve:

$$-x = \frac{a_{14}}{\lambda} \times \frac{a_{44}(\lambda - a_{11}) + a_{14}^2}{a_{11}^2}; \quad y = 0; \quad z = 0$$

also reduziert sich dieselbe auf die X Axe.

(Es ist geometrisch evident, dass jeder Punkt einer Hauptaxe als Axenfusspunkt betrachtet werden kann.)

Um die andern Zweige zu finden, gehen wir wieder von den ursprünglichen Gleichungen der Polarebenen und der Axen aus:

$$(a_{11}\alpha + a_{14})x + a_{22}\beta y + a_{33}\gamma z + a_{14}\alpha + a_{44} = 0$$

$$\frac{x - \alpha}{a_{11}\alpha + a_{14}} = \frac{y - \beta}{a_{22}\beta} = \frac{z - \gamma}{a_{33}\gamma}$$

$$\lambda\alpha = a_{11}\alpha + a_{14}, \quad \lambda\beta = a_{22}\beta, \quad \lambda\gamma = a_{33}\gamma.$$

Diese Gleichungen werden erfüllt:

1.) durch $\beta = \gamma = 0$, woraus der Kurvenzweig $z = y = 0$ folgt,
2.) durch $\lambda = a_{22} \quad \gamma = 0$,
3.) durch $\lambda = a_{33} \quad \beta = 0$.

Im zweiten Falle ergibt sich:

$$\alpha = \frac{a_{14}}{a_{22} - a_{11}} \gamma = 0, \quad \beta \text{ unbestimmt}, \quad z = 0.$$

Dies in obige Gleichungen einsetzend, erhält man:

$$\frac{a_{14}\, a_{22}}{a_{22} - a_{11}} x + a_{22}\beta y + \frac{a_{14}^2}{a_{22} - a_{11}} + a_{14} = 0$$

$$\frac{a_{22} - a_{11}}{a_{14}} x = \frac{y}{\beta}; \quad z = 0 \quad \text{oder kürzer:}$$

$$\alpha x + \beta y + m = 0; \quad \frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta}; \quad z = 0$$

Durch Elimination von β folgt:

$$x^2 + y^2 + \frac{m}{\alpha} x = 0; \quad z = 0$$

Der zweite Kurvenzweig ist also ein Kreis in der XY Ebene, der die Y Axe im Anfange berührt. Da für den dritten Zweig analoges gelten muss, so folgt:

Die Fusspunkte der durch einen Punkt P einer Hauptaxe an eine Schar konfokaler Flächen gehenden Normalen verteilen sich auf je einen Kreis in jeder der Symmetrieebenen, welche die Hauptaxe als gemeinsamen Durchmesser haben und sich in P schneiden.

IV. Ist P Mittelpunkt der F_2 selbst, so folgt aus den ursprünglichen Gleichungen:

$$a_{11}ax + a_{22}\beta y + a_{33}\gamma z + a_{44} = 0$$

$$\frac{x - \alpha}{a_{11}\alpha} = \frac{y - \beta}{a_{22}\beta} = \frac{z - \gamma}{a_{33}\gamma}; \quad \lambda\alpha = a_{11}\alpha, \quad \lambda\beta = a_{22}\beta, \quad \lambda\gamma = a_{33}\gamma$$

also entweder $\alpha = \beta = \gamma = o$, x, y, z unbestimmt, dann folgt weiter $a_{44} = o$, d. h. jeder Punkt der unendlich fernen Ebene kann als Kurvenpunkt betrachtet werden.

Oder $\lambda = a_{11}$, $\beta = \gamma = o$, dann muss $y = z = o$ sein, damit $\frac{x - \alpha}{a_{11}\alpha}$ endliche Werte annehmen kann.

Es ist also die X Axe und analog die Y und die Z Axe als Kurvenzweig zu betrachten.

V. Wenn P ins Unendliche rückt, so wissen wir im voraus, dass die Kurve eben wird.

Denn wenn alle zu betrachtenden Axen einander parallel sind, so werden auch die auf ihnen senkrecht stehenden Polarebenen einander parallel; da also letztere sich in einer (unendlich fernen) Geraden schneiden, so liegen ihre Pole alle auf einer Geraden; daher liegen alle Axen, welche diese letztere Gerade (die ein Durchmesser ist,) schneiden und einander parallel sind, zusamt ihrer Fusspunktkurve in einer Durchmesserebene.

Sei der Mittelpunkt der F_2 Anfangspunkt der Koordinaten und seien μ, ν, π die Richtungskosinus der zu betrachtenden Axen.

Die Gleichung der Fläche ist:

7.) $ax^2 + by^2 + cz^2 + 1 = o$

Die Polarebene von α, β, γ ist:

8.) $a\alpha x + b\beta y + c\gamma z + 1 = o$

Die Gleichungen der Axen durch α, β, γ sind:

9.) $$\frac{x - \alpha}{a\alpha} = \frac{y - \beta}{b\beta} = \frac{z - \gamma}{c\gamma}$$

Für alle einander parallelen Axen ist:

10.) $a\alpha = k\mu \quad b\beta = k\nu \quad c\gamma = k\pi$

Durch Substitution von 10.) in 8.) und 9.) folgt:

11.) $$\mu x + \nu y + \pi z + \frac{1}{k} = o$$

$$\frac{x}{k\mu} - \frac{1}{a} = \frac{y}{k\nu} - \frac{1}{b} = \frac{z}{k\pi} - \frac{1}{c}$$

oder

12.) $\nu x - \mu y = k\nu\mu m \quad \left| \; m \equiv \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right.$

13.) $\pi x - \mu z = k\mu\pi n \quad \left| \; n \equiv \frac{1}{a} - \frac{1}{c} \right.$

Aus 12.) und 13.) folgt weiter:

14.) $$\frac{1}{k} = \frac{\mu\nu m}{\nu x - \mu y} = \frac{\mu\pi n}{\pi x - \mu z}$$

Aus 11.) und 14.) folgen als Gleichungen unserer Kurve:

15.) $\mu\nu x^2 + (\nu^2 - \mu^2)xy - \mu\nu y^2 + \nu\pi zx - \mu\pi zy + \mu\nu m = o$

16.) $\frac{p}{\mu}x + \frac{n}{\nu}y - \frac{m}{\pi}z = o; \quad p \equiv (m - n) \equiv \frac{1}{c} - \frac{1}{b}$

Um die wahre Gestalt unserer Kurve, welche ein Kegelschnitt in der Ebene (16) ist, zu finden, suchen wir den Winkel zwischen den Asymptoten zu bestimmen.

Schreiben wir 15.) und 16.) in der Form:

I.) $\alpha x + \beta y = z$, II.) $x^2 + axy - y^2 + bxz + cyz + d = o$,

so ist III.) $x^2 + axy - y^2 + bxy + cyz = o$

die Gleichung des zur Fläche II.) gehörigen Asymptotenkegels.

(Anmerkung. Die Buchstaben a, b, c, α, β, in I bis III) sind von den Koeffizienten in 7.) — 9.) wesentlich verschieden.)

Substituieren wir den Wert von z aus I.) in III.), so folgt:

IV.) $x^2(1 + \alpha b) + xy(a + \beta b + \alpha c) - y^2(1 - \beta c) = o$,

welches Ebenenpaar durch den Schnitt von I.) und III.) hindurchgeht und daher auch die Asymptoten des durch I.) und II.) bestimmten Kegelschnittes enthält.

Da diese Asymptoten auch in der Ebene I.) liegen, so erhalten wir deren Gleichungen, wenn wir IV.) in die Faktoren $\rho x + \sigma y$ und $\rho' x + \sigma' y$ zerlegen, wie folgt:

$$\begin{matrix} \rho x + \sigma y = o & \rho' x + \sigma' y = o \\ \alpha x + \beta y = z & \alpha x + \beta y = z \end{matrix}$$ oder in anderer Form:

V. $$\frac{x}{\sigma} = \frac{y}{-\rho} = \frac{z}{\alpha\sigma - \beta\rho} \text{ und } \frac{x}{\sigma'} = \frac{y}{-\rho'} = \frac{z}{\alpha\sigma' - \beta\rho'}$$

Der Winkel dieser Asymptoten ist bestimmt durch:

$$\cos\delta = \frac{\sigma\sigma' + \rho\rho' + (\alpha\sigma - \beta\rho)(\alpha\sigma' - \beta\rho')}{\sqrt{[\sigma^2 + \rho^2 + (\alpha\sigma - \beta\rho)^2]} \times \sqrt{[\sigma'^2 + \rho'^2 + (\alpha\sigma' - \beta\rho')^2]}}$$

Der Zähler von $\cos\delta$ kann geschrieben werden:

VI. $\sigma\sigma'(1 + \alpha^2) + \rho\rho'(1 + \beta^2) - \alpha\beta(\sigma\rho' + \rho\sigma')$

Durch Substitution dieser Ausdrücke verwandelt sich VI. in:

VII. $\alpha b + \beta c - \alpha\beta a - \alpha^2 + \beta^2$.

Nun entnehmen wir aus 15.) und 16.) die Werte von

$$\alpha, \beta, a, b, c: \quad \alpha = \frac{\pi}{\mu}\frac{p}{m} \quad \beta = \frac{\pi}{\nu}\frac{n}{m}$$

$$a = \frac{\nu}{\mu} - \frac{\mu}{\nu} \quad b = \frac{\pi}{\mu} \quad c = -\frac{\pi}{\nu}.$$

Durch dieselben wird VII zu:

17.) $\frac{\pi^2 p}{\mu^2 m} - \frac{\pi^2 n}{\nu^2 m} - \frac{\pi^2 p n}{\mu \nu m^2}\left(\frac{\nu}{\mu} - \frac{\mu}{\nu}\right) - \frac{\pi^2 p^2}{m^2 \mu^2} + \frac{\pi^2 n^2}{m^2 \nu^2}$

$\equiv \frac{\pi^2}{m^2}\left\{\frac{p m}{\mu^2} - \frac{n m}{\nu^2} - \frac{p n}{\mu^2} + \frac{p n}{\nu^2} - \frac{p^2}{\mu^2} + \frac{n^2}{\nu^2}\right\}$

$\frac{\pi^2}{m^2}\left(\frac{p}{\mu^2} - \frac{n}{\nu^2}\right)\left\{m - n - p\right\}$. Nun ist aber (vide bei 12):

$m - n - p \equiv \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) - \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right) - \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right)$

$\equiv o$

Also ist die betrachtete Kurve eine gleichseitige Hyperbel.

Bei Benützung der geometrisch a priori erkannten Thatsache, dass die Kurve in einer Durchmesserebene liegt, kommen wir zu obigen Resultate viel kürzer. Wir wählen nämlich dann 3 zu einander senkrechte Durchmesserebenen zu Koordinatenebenen, und jenen Durchmesser als Y Axe, welchem die zu betrachtenden Axen parallel sind, ferner jene Ebene als X Y Ebene, in welcher die Kurve liegt. Dann sind zwar die Koeffizienten der F_2 nicht vollständig unabhängig von einander, sondern durch den gewählten unendlich fernen Punkt beeinflusst, aber jedenfalls ist F_2 von der Form:

18.) $a_{11} x^2 + 2a_{12} xy + a_{22} y^2 + 2a_{13} xz + 2a_{23} yz + a_{33} z^2 + a_{44} = o$

Die Polarebene des Punktes α, β, o ist:

19.) $(a_{11} \alpha + a_{12} \beta) x + (a_{12} \alpha + a_{22} \beta) y + (a_{13} \alpha + a_{23} \beta) z + a_{14} = o$

Wir betrachten nun nur solche Punkte α, β, o, durch welche Axen parallel der Y Axe gehen, und deren Polarebenen demzufolge parallel der X Z Ebene sind; für dieselbe muss daher sein:

20.) $\begin{aligned} a_{11}\alpha + a_{12}\beta &= o \\ a_{13}\alpha + a_{23}\beta &= o \end{aligned}$

Hieraus folgt die Bedingung, der die Koeffizienten von 18.) unterworfen sind, nämlich $a_{11} a_{23} - a_{12} a_{13} = o$

Die Gleichungen der Polarebenen und der Axen zu α, β, o sind also

$$(a_{12}\alpha + a_{22}\beta) y + a_{44} = o$$

21.) $x = \alpha, \quad z = o.$ Aus 20.) ergibt sich ferner:

22.) $\beta = \frac{-a_{11}\alpha}{a_{12}} = \frac{-a_{11} x}{a_{12}}$

Indem wir 22.) und 21.) in die Gleichung der Polarebene substituieren, erhalten wir als Gleichung der gesuchten Kurve:

$$\left(a_{12} - \frac{a_{11}a_{22}}{a_{12}}\right)xy + a_{44} = o$$

Alle zu einander parallelen Axen liegen in einer Durchmesserebene und ihre Fusspunkte auf einer gleichseitigen Hyperbel, deren Asymptoten Durchmesser der F_2 sind. Dieselbe degeneriert in zwei Gerade $x = o$ $y = o$, wenn der unendlich ferne Punkt in der Richtung einer Axe liegt ($a_{12} = o = a_{23}$).

Untersuchen wir jetzt einige spezielle Formen der Fläche.

A. Paraboloid ($a_{33} = o$).

Hier werden die Gleichungen unserer Kurve:

$$-x = a_{14} \,.\, 22 \times \frac{\lambda a_{44} \,.\, 11 \,.\, 22 + \lambda(a^2_{14}22 + a^2_{24}11) + a^2_{34} \,.\, 22 \,.\, 11}{\lambda^2(a^2_{14} \,.\, 22^2 + a^2_{24}11^2) + a^2_{34}11^2 22^2}$$

$$-y = a_{24} \,.\, 11 \times \frac{f}{\varphi} \qquad -z = \frac{a_{34} \,.\, 11 \,.\, 22}{\lambda} \times \frac{f}{\varphi}$$

Die Kurve hat keine wesentlich andere Form als im allgemeinen Falle; nur jene Ausdrücke, welche auf den unendlich fernen Punkt bezug haben, erfahren eine besondere Vereinfachung, denn für $\lambda = o$ ist:

$$x = +\frac{a_{14}}{a_{11}}, \quad y = \frac{a_{24}}{a_{22}} \qquad z = +\infty$$

Daher ist die Asymptote der Kurve parallel zur Z Axe. Alle zur Z Axe parallelen Ebenen haben mit der Kurve nur 4 Punkte im Endlichen gemein, wie denn auch die Gleichung $\alpha x + \beta y + \delta = o$, wenn man für x und y die Funktionen von λ schreibt, die Form erhält: $b_0 \lambda^4 + \ldots\ldots b_4 = o$. Die Gleichungen der Asymptote sind: $a_{11}x - a_{14} = o \quad a_{22}y - a_{24} = o$.

Für die Gleichung der Asymptotenschmiegungsebene setzen wir $b_4 = o$ $b_3 = o$ und erhalten dieselbe dann als Eliminationsdeterminante des Systems $\alpha.x + \beta.y + \delta.1 = o$

$$\alpha\frac{a_{14}}{a_{11}} + \beta\frac{a_{24}}{a_{22}} + \delta.1 = o$$

$$\alpha\left\{a_{14}\,a^2_{34} + \frac{a_{14}}{a_{11}}m\right\} + \beta\left\{a_{24}\,a^2_{34} + \frac{a_{24}}{a_{22}}m\right\} + \delta.a^2_{34}(a_{11} + a_{22}) = o$$

$$m \equiv a_{22}(a^2_{14} + a^2_{34}) + a_{11}(a^2_{24} + a^2_{34}) - a_{11}\,a_{22}\,a_{44}$$

Der Verlauf der Kurve ist ähnlich, wie im Falle der zentrischen Flächen; der Anfang hat drei zu einander senkrechte Tangenten und wird von 2 Schleifen umschlungen, die Kurve dringt in 6 Oktanten ein; sei z. B. $o < a_{11} < a_{22}$ und der unendlich ferne Punkt im Oktanten 1, so geht die Kurve (Figur I)

für $\lambda =$	o	durch ∞ aus	1	nach III
„ „	$a_{11} - \eta$	durch P „	III	„ 3
„ „	a_{11}	„ X „	3	„ IV
„ „	$a_{22} - \zeta$	„ P „	IV	„ 4
für $\lambda =$	a_{22}	durch Y aus	4	nach I
für einen Wert $>$ oder $<$	a_{22} / o	„ P „	I	„ 1

Betrachten wir beim Paraboloid die besonderen Lagen des Punktes P, so gibt es hiebei ausser der Vereinfachung der Formeln nur eine bemerkenswerte Aenderung, wenn nämlich P in unendlicher Ferne liegt. Wir müssen für diesen Fall eine völlig neue Diskussion beginnen, weil die Deduktion Seite 16 einen Mittelpunkt der F_2 als Koordinatenanfang voraussetzte.

Sei das Paraboloid $a x^2 + b y^2 + 2 z = o$, und P sei bestimmt durch die Richtungskosinus μ, ν, π.

Die Polare von α, β, γ ist:

$$a\alpha x + b\beta y + z + \gamma = o; \quad \text{das Lot auf dieselbe:}$$

$\frac{x - \alpha}{a\alpha} = \frac{y - \beta}{b\beta} = \frac{z - \gamma}{1}$; damit dasselbe die verlangte

Richtung habe, ist: $\frac{\mu}{\pi} = a\alpha \qquad \frac{\nu}{\pi} = b\beta$

Durch Substitution dieser Werte in die vorige Gleichung folgt:

$$\frac{\mu}{\pi} x + \frac{\nu}{\pi} y + z \gamma = o$$

$$\frac{\pi}{\mu} x - \frac{1}{a} \cdot \frac{\pi}{\nu} y - \frac{1}{b} = z - \gamma$$

Durch Elimination von γ folgt, dass der gesuchte Ort eine Gerade ist.

B. Rotationsfläche ($a_{11} = a_{33}$).

Bei einer Rotationsfläche ist der Axenkomplex nicht, wie im allgemeinen Falle, ein Tetraederkomplex, denn die unendlich vielen Symmetrieebenen sind alle singulär; alle Komplexkegel zerfallen in Strahlenbüschel erster Ordnung. Auch gehen in diesem Falle durch einen Punkt des Raumes nur zwei Flächen einer konfokalen Schar, daher ist hier im allgemeinen irgend ein Punkt P Fusspunkt von nur zwei Normalen resp. zwei Axen.

Wählen wir die durch P gehende Parallele zur Rotationsaxe der F_2 als Y Axe und legen die XY Ebene durch das Zentrum der F_2, so wird $a_{34} = 0$ und wir erhalten die nämlichen Gleichungen wie Seite 11. Daher wird unsere Kurve wieder eine Kurve mit Doppelpunkt in der durch P und die Rotationsaxe bestimmten Symmetrieebene, analog wie Seite 14; aber ein zweiter Zweig der Kurve existiert nicht mehr; denn derselbe würde sich aus den Gleichungen Seite 13, Nr. 6 bestimmen:

$$\lambda\alpha = a_{11}\alpha + a_{14} \quad \lambda\beta = a_{22}\beta + a_{24} \quad \lambda\gamma = a_{33}\gamma$$
$$\gamma \text{ beliebig}; \quad \lambda = a_{33} = a_{11} \text{ also } \quad a_{14} = 0.$$

D. h. dieser Zweig könnte nur existieren, wenn P auf der Rotationsaxe läge; dann werden aber die Gleichungen des ersten Zweiges zu: $y = f(\lambda) \quad x = z = 0$, d. h. die Kurve degeneriert in die Rotationsaxe.

In diesem Falle wird ferner α willkürlich, γ willkürlich, $\beta = \frac{a_{24}}{a_{11} - a_{22}}$. Eliminiert man α und γ mit Hilfe der Gleichungen der Polarebenen und der Axen, nämlich:

$$a_{11}\alpha x + (a_{22}\beta + a_{24})y + a_{11}\gamma z + a_{24}\beta + a_{44} = 0$$
$$\frac{x - \alpha}{a_{11}\alpha} = \frac{y - \beta}{a_{22}\beta + a_{24}} = \frac{z - \gamma}{a_{11}\gamma},$$

, so findet man, dass man die Punkte der Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{a_{24}^2 + a_{44}(a_{11} - a_{22})}{a_{24}\, a_{11}} y = 0$$

als Axenfusspunkte betrachten kann.

Die übrigen speziellen Fälle bieten um so weniger Interesse, je mehr sich die polaren Eigenschaften der besonderen Flächen modifizieren und somit auch der Axenkomplex in einzelne Gerade sich auflöst; dieselben sollen daher hier nicht weiter erörtert werden.

§ 4.

Von den Flächen, auf welchen die Kurve liegt.

Setzen wir in den Gleichungen der Polarebene und der Axen statt $\frac{x}{a_{14}}$ kürzer x also statt $x \quad x \cdot a_{11}$, ebenso statt $\frac{y}{a_{24}}$ kürzer y etc., so erhalten wir zur Bestimmung unserer Flächen:

1.) $a^2_{14} \frac{\lambda x + 1}{\lambda - a_{11}} + a^2_{24} \frac{\lambda y + 1}{\lambda - a_{22}} + a^2_{34} \frac{\lambda z + 1}{\lambda - a_{33}} + a_{44} = 0$

2. und 3.) $(\lambda - a_{11})x = (\lambda - a_{22})y = (\lambda - a_{33})z$

Aus 2.) und 3.) folgt:

4.) $\lambda = \frac{a_{11}x - a_{22}y}{x - y} = \frac{a_{11}x - a_{33}z}{x - z} = \frac{a_{22}y - a_{33}z}{y - z}$

Daraus folgt als Gleichung des Axenkegels

$(a_{11} - a_{22})xy + (a_{22} - a_{33})yz + (a_{33} - a_{11})zx = 0$

Wir können nun aus 4.) für jeden der Koeffizienten von a^2_{14}, a^2_{24}, a^2_{34} drei Werte einsetzen und erhalten:

$$\frac{\lambda x + 1}{\lambda - a_{11}} = \frac{a_{11}x^2 - a_{22}xy + x - y}{(a_{11} - a_{22})y} = \frac{a_{11}x^2 - a_{33}xz + x - z}{(a_{11} - a_{33})z}$$

$$= \frac{a_{22}xy - a_{33}xz + y - z}{(a_{22} - a_{11})y - (a_{33} - a_{11})z}$$

$$\frac{\lambda y + 1}{\lambda - a_{22}} = \frac{a_{22}y^2 - a_{11}xy + y - x}{(a_{22} - a_{11})x} = \frac{a_{22}y^2 - a_{33}yz + y - z}{(a_{22} - a_{33})z}$$

$$= \frac{a_{11}xy - a_{33}yz + x - z}{(a_{11} - a_{22})x - (a_{33} - a_{22})z};$$

$$\frac{\lambda z + 1}{\lambda - a_{33}} = \frac{a_{33}z^2 - a_{11}xz + z - x}{(a_{33} - a_{11})x} = \frac{a_{33}z^2 - a_{22}yz + z - y}{(a_{33} - a_{22})y}$$

$$= \frac{a_{11}xz - a_{22}yz + x - y}{(a_{11} - a_{33})x - (a_{22} - a_{33})y};$$

Diese Werte geben zu 27 Flächen Veranlassung, auf denen unsere Kurve liegt; von denselben sind neun dritter, die übrigen vierter Ordnung. — Wir wollen uns abgekürzt so ausdrücken: „Wir nehmen den Wert (p, q, r), wenn wir aus der ersten Reihe den pten, aus der zweiten den qten, aus der dritten den rten in die Gleichung 1.) einführen."

Folgende Werte führen uns dann zu Flächen dritter Ordnung:

(1, 1, 1); (1, 1, 2); (2, 1, 1);
(2, 2, 2); (1, 2, 2); (2, 2, 1);
(1, 3, 2); (3, 1, 1); (2, 2, 3).

Wir wollen zuerst die sechs ersten Flächen mit den einfachsten Gleichungen betrachten, jene nämlich, deren zugehörige Werte (p, q, r) nur die Nenner x, y, z, enthalten, und auf welchen demzufolge je eine Koordinatenaxe liegt.

Setzen wir $a_{ii} - a_{kk} \equiv a_{ik}$; $a_{ii} \equiv a_i$, ferner

$\frac{a_{i4}^2}{a_{kk} - a_{ll}} \equiv a_{ikl}$, so wird die zum Werte (1, 1, 1) gehörige Fläche:

$$a_{112}\, a_1\, x^3 - a_{112}\, a_2\, x^2 y + a_{212}\, a_1\, x\, y^2 - a_{212}\, a_2\, y^3 + a_{331}\, y\, z^2 - a_{331}\, a_1\, x\, y\, z + a_{112}\, x^2 - a_{212}\, y^2 + a_{331}\, y\, z - (a_{112} + a_{221} + a_{331} - a_{44})\, x\, y = 0$$

Von den Koeffizienten der F_3 kann im allgemeinen Falle nur jener von x y zu Null werden.

Die übrigen 5 Flächen erhält man, wenn man die untereinanderstehenden Indizes in den folgenden Schematen vertauscht und dabei x, y, z, als x_1, x_2, x_3, gelten lässt:

$$\text{I}\ \begin{matrix}1&2\\2&1\end{matrix}\quad \text{II}\ \begin{matrix}1&3\\3&1\end{matrix}\quad \text{III}\ \begin{matrix}2&3\\3&2\end{matrix}\quad \text{IV}\ \begin{matrix}1&2&3\\2&3&1\end{matrix}\quad \text{V}\ \begin{matrix}1&2&3\\3&1&2\end{matrix}$$

Unsere Fläche hat also die Form:

$$U = u_3 + u_2 = c_0\, x^3 - c_1\, x^2\, y + c_2\, x\, y^2 - c_3\, y^3 + c_4\, y\, z^2 - c_5\, x\, y\, z + c_6\, x^2 - c_7\, y^2 + c_8\, y\, z - c_9\, x\, y = 0$$

Die Abgeleiteten von U sind:

$$U_x \equiv 3\,c_0x^2 - 2\,c_1xy + c_2y^2 - c_5yz + 2\,c_6x - c_9y$$
$$U_y \equiv c_1x^2 + 2\,c_2xy - 3\,c_3y^2 + c_4z^2 - c_5xz - 2\,c_7y + c_8z - c_9x$$
$$U_z \equiv 2\,c_4yz - c_5xy + c_8y$$
$$U_w \equiv c_6x^2 - c_7y^2 + c_8yz - c_9xy$$

Dividiert man U_z durch a_{331}, so wird:

$$\frac{U_z}{a_{331}} \equiv y\,[2a_3z - a_1x + 1]$$

Für $y = o$ folgt aus $U_w = o : x^2 = o$

Für $y = x = o$ folgt aus $U_y = o$: $c_4z^2 + c_8z = o$

Für $y = x = o$ folgt U_z unabhängig von z gleich o.

Daher sind Doppelpunkte der Fläche:

1.) $x = y = z = o$ 2.) $x = y = o$, $z = -\frac{c_8}{c_4} = -\frac{1}{a_{33}}$

oder mit Berücksichtigung dessen, dass wir z statt $\frac{1}{a_{34}}$ geschrieben haben:

$$2.)\quad x = y = o, \quad z = -\frac{a_{34}}{a_{33}}$$

Der Anfangspunkt ist ein konischer Doppelpunkt, denn damit der Kegel $u_2 = o$ in zwei Ebenen zerfalle, muss sein:

$$u_2 \equiv (c_6x + \mu y + \nu z)(x + my + nz)$$
$$\equiv c_6x^2 + (\mu + mc_6)xy + (\nu + nc_6)xz + m\mu y^2 + \nu\,.\,(m + \mu)yz + \nu nz^2$$

Diese Koeffizienten mit jenen von u_2 in der Gleichung für F_2 verglichen, folgt:

1.) $\mu + mc_6 = -c_9$ 2.) $\nu + n\,.\,c_6 = o$ 3.) $m\mu = -c_7$

4.) $(m + \mu)\,.\,\nu = c_8$ 5.) $n\nu = o$

Für $n = o$ folgt aus 2.) $\nu = o$; für $\nu = o$ folgt aus 2.) $n = o$ oder $c_6 = o$; in beiden Fällen folgt aus 4.) $c_8 = o$. Es ist aber im allgemeinen weder $c_6 \equiv \frac{a^2_{14}}{a_{11} - a_{22}}$ noch $c_8 \equiv \frac{a^2_{34}}{a_{33} - a_{11}}$ gleich

Null, daher ist der Doppelpunkt im Anfange nur dann nicht konisch, sondern biplanar, wenn der Punkt P in einer Symmetrieebene der der Aufgabe zu grunde liegenden F_2 sich befindet.

Um die Beschaffenheit des zweiten Doppelpunktes zu untersuchen, wählen wir diesen als neuen Koordinatenanfang, indem wir

$F_3\left(x,\ y,\ z - \frac{c_8}{c_4}\right)$ bilden.

Dann erhalten wir folgende quadratische Glieder:

$$-2\,c_8\,y\,z + \frac{c_5\,c_8}{c_4}\,xy + c_6x^2 - c_7y^2 + c_8yz - c_9xy$$

Daher ist der Berührungskegel im 2. Doppelpunkt:

$$M \equiv -c_8\,yz + c_6\,x^2 - c_7\,y^2 + k\,x\,y = o$$

Damit derselbe in 2 Ebenen zerfalle, muss sein:

$$\mu + m\,.\,c_6 = -k \qquad \nu + n\,.\,c_6 = o \qquad m\mu = -c_7$$
$$(m + \mu)\nu = -c_8 \qquad n\nu = o$$

Und analog wie früher folgt, dass auch der zweite Doppelpunkt im allgemeinen konisch und nur dann biplanar ist, wenn P in einer Symmetrieebene der Fläche zweiter Ordnung liegt.

Um zu sehen, ob noch weitere Doppelpunkte vorhanden sind, führen wir aus $U_z = o$ die Wurzel $z = \frac{c_5 x - c_8}{2c_4}$ in die übrigen gleich Null gesetzten Abgeleiteten ein und erhalten:

1.) $U_x \equiv 3c_0\,x^2 - k_1\,x\,y + c_2\,y^2 + 2\,c_6\,x + k_2\,y = o$

2.) $U_y \equiv k_1\,x^2 + 4\,c_2\,x\,y + 6\,c_3\,y^2 + 2\,k_2\,x - 4\,c_7\,y - k_3 = o$

3.) $U_w \equiv c_6\,x^2 - c_7\,y^2 + k_2\,x\,y - k_3\,y = o$

$$k_1 \equiv 2\,c_1 + \frac{c_5^2}{2\,c_4};\quad k_2 \equiv \frac{c_8\,c_5}{2\,c_4} - c_9;\quad k_3 \equiv \frac{c_8^2}{2\,c_4}$$

Wenn nun in der Geraden $y = \lambda x = \mu z$ ein zweiter Doppelpunkt liegt, so müssen sich die Gleichungen 1.) 2.) 3.) durch einen Wert von λ erfüllen lassen und es folgt durch Substitution von $y = \lambda x$ in 1.) und 3.):

4.) $(3c_0 - k_1\,\lambda + c_2\,\lambda^2)\ x + 2c_6 + k_2\,\lambda = o$
$(c_6 + k_2\,\lambda - c_7\,\lambda^2)\ x - k_3\,\lambda = o$

Die Koexistenz dieser Gleichungen liefert:

5.) $k_3 \lambda (3c_0 - k_1 \lambda + c_2 \lambda^2) + (c_6 + k_2 \lambda - c_7 \lambda^2)(2c_6 + k_2 \lambda) = 0$

Aus 3.) wird durch die Substitution $y = \lambda y$:

6.) $(- k_1 + 4c_2 \lambda - 6c_3 \lambda^2) x^2 + (2 k_2 - 4c_7 \lambda) x - k_3 = 0$

Setzen wir in 6.) für x einen Wert aus 4.) so verwandelt sich 6.) in eine Gleichung 7.), welche in bezug auf λ vom 4. Grade ist.

Hätte nun F_3 noch einen oder zwei weitere Doppelpunkte, so müsste 5.) einen rationalen Faktor besitzen, den es mit 7.) gemeinsam hätte; dies ist aber im allgemeinen nicht der Fall.

Fragen wir nun nach den Schnittpunkten der auf der F_3 liegenden Geraden mit unserer Kurve:*)

---

*)Anmerkung:

Im Cambridge and Dublin Math. Journ. 4. Band pag. 256 sind die Modifikationen dargestellt, welche im Falle von Doppelpunkten die Lage der Geraden auf der F_3 erleidet. Da dem Verfasser dieser Abhandlung das genannte Werk nicht zugänglich war, so hat er sich für die Zwecke der obigen Darstellung über den Fall von zwei Doppelpunkten selbst folgende Rechenschaft gegeben:

Hat $F_3 \equiv u_3 + u_2 = 0$ noch einen zweiten Doppelpunkt, so berühren die Kegel u_3 und u_2 einander und somit auch die F_3 längs der Verbindungslinie der Doppelpunkte.

Denn die allgemeine Gleichung einer F_3, welche die Z Axe als Gerade und den Anfang als Doppelpunkt enhält, ist:

$$c_1x^3 + c_2x^2y + c_3xy^2 + c_4y^3 + c_5x^2z + c_6xz^2 + c_7y^2z + c_8zy^2 + c_9xyz + c_{10}x^2 + c_{11}xy + c_{12}y^2 + c_{13}xz + c_{14}yz = 0$$

Damit diese den Punkt $x = 0 = y = z = \alpha$ als Doppelpunkt enthalte, müssen die linearen Glieder von F (x, y, z + α,) identisch verschwinden. Diese sind aber: $c_6\alpha^2x + c_8\alpha^2y + c_{13}\alpha x + c_{14}\alpha y$

Es muss also sein $\left.\begin{matrix} c_6\alpha + c_{13} = 0 \\ c_8\alpha + c_{14} = 0 \end{matrix}\right\}$ oder $c_6 c_{14} - c_8 c_{13} = 0$

Ordnen wir ferner u_3 und u_2 nach Potenzen von x und bilden die Sylvestersche Eliminationsdeterminante von $u_3 = u_2$, so verschwindet:

$$\begin{vmatrix} c_1 & c_2y + c_5z & c_2y^2 + c_9yz + c_6z^2 & y(c_4y^2 + c_7yz + c_8z^2) & 0 \\ 0 & c_1 & c_2y + c_5 z & c_2y^2 + c_9yz + c_6z^2 & y(c_4y^2 + c_7yz + c_8z^2) \\ c_{10} & c_{11}y + c_{13}z & y \cdot (c_{12}y + c_{14}z) & 0 & 0 \\ 0 & c_{10} & c_{11}y + c_{13}z & y(c_{12}y + c_{14}z) & 0 \\ 0 & 0 & c_{10} & c_{11}y + c_{13}z & y(c_{12}y + c_{14}z) \end{vmatrix}$$

hat eine Wurzel $y = o$; damit sie noch eine zweite Wurzel $y = o$ habe, muss der Koeffizient von y verschwinden; und diesen erhalten wir, wenn wir an Stelle der mit höheren Potenzen von y multiplizierten Glieder Null setzen, als folgende Determinante:

$$\begin{vmatrix} c_1 & c_5z & c_6z^2 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & c_5z & c_6z^2 & c_8z^2 \\ c_{10} & c_{13}z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{10} & c_{13}z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{10} & c_{13}z & c_{14}z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_6z^2, & c_8z^2 \\ c_{13}z, & c_{14}z \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} c_1 & c_5z & c_6z^2 \\ c_{10} & c_{13}z & 0 \\ 0 & c_{10} & c_{13}z \end{vmatrix}$$

und man sieht, dass derselbe für $c_6\, c_{14} - c_8\, c_{13} = o$ identisch verschwindet.

Die zu den beiden Wurzeln $y = o$ gehörige zweite Gleichung der Berührgeraden der Kegel u_3 und u_2 findet man durch Subsitution von $y = o$ in $u_3 = o = u_2$ als gemeinsame Wurzeln von

$o = c_1x^3 + c_5zx^2 + c_6z^2x$ und $o = c_{10}zx^2 + c_{13}zx$,

also $x = o$, wie es sein muss.

Also ist die Bedingung, dass die Kegel $u_3 = o$ und $u_2 = o$ einander und demzufolge die $F_3 = u_3 + u_2 = o$ längs der Geraden $x = y = o$ berühren, übereinstimmend mit der Bedingung, dass F_3 auf der Geraden $x = y = o$ zwei Doppelpunkte besitze, und unser Satz ist bewiesen.

Demzufolge gibt es im Falle zweier Doppelpunkte P, M durch jeden derselben ausser PM nur noch 4 Gerade der F_3 a_1, a_2, a_3, a_4, und b_1, b_2, b_3, b_4 (und es ist leicht einzusehen, dass jede Gerade a eine und nur eine Gerade b schneidet).

Legen wir ferner durch irgend zwei Gerade a eine Ebene, so enthält diese eine dritte Gerade c, welche die ZAxe nicht schneidet;

solcher Geraden gibt es $\frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$.

Die dritte Gerade einer durch zwei a gehenden Ebene fällt mit der dritten Geraden einer durch zwei b gehenden Ebene zusammen. Denn legen wir durch die Gerade c der Ebene a_1 a_2 und durch den zweiten Doppelpunkt M eine Ebene, so enthält letztere ausser c noch 2 Gerade b_l b_k, welche sich in M schneiden. Es sind also alle dritten Geraden der durch zwei b gehenden Ebenen identisch mit allen Geraden c.

Es gibt endlich eine Ebene, welche die Kegel u_3 und u_2 längs ihrer Berührungsgeraden PM berührt und demzufolge auch die F_3; diese Ebene schneidet die F_3 noch in einer Geraden d, welche die PM schneidet.

Die Gleichungen von d könnte man durch eine einfache Rechnung finden; in unserm Falle

$F_3 \equiv c_0x^3 - c_1x^2y + c_2xy^2 - c_3y^3 + c_4yz^2 - c_5xyz + c_6x^2 - c_7y^2 + c_8yz - c_9xy = 0$ erkennt man leicht ohne Rechnung, dass die Ebene $y = 0$ selbst die F_3 längs der Z Axe berührt und dass die zweiten Gleichungen der in ihr enthaltenen Geraden der F_3 aus:

$c_0x^3 + c_6x^2 = 0$ sich ergeben, und somit die Gleichungen von d sind: $y = 0$ $x = -\frac{c_6}{c_0}$ Also schneidet d die Z Axe in ihrem unendlich fernen Punkte.

1.) Die Z Axe schneidet die c_5 ausser im Anfange noch im zweiten Doppelpunkte M der F_3 und hat also im Ganzen vier Punkte mit der Kurve gemeinsam.

2.) Die vier übrigen Geraden durch den Anfang P schneiden den Axenkegel, auf welchem unsere Kurve liegt, nicht mehr, und daher auch die letztere nur (dreipunktig) im Anfange.

3.) Die vier weiteren Geraden durch den Punkt M schneiden den Axenkegel und die c_5 noch in einem zweiten reellen Punkte.

4.) Die 6 Geraden welche durch keinen Doppelpunkt gehen und die Z Axe nicht schneiden, schneiden unsere c_5 in zwei reellen oder imaginären Punkten.

5.) Die Gerade, welche die Z Axe ausserhalb der Doppelpunkte schneidet, (und zwar in ihrem unendlich fernen Punkte,) schneidet den Axenkegel und dem zufolge auch die c_3 in einem reellen im endlichen gelegenen Punkte.

Würden wir bei Aufstellung der Gleichungen unserer Kurve (Seite 4) nicht die Koeffizienten einer spezialisierten F_2 der konfokalen Schar gewählt, sondern den Parameter μ dieser Schar in die genannten Gleichungen aufgenommen haben, so wären die letzteren weit komplizierter geworden und es hätte grosse Mühe gekostet, nachzuweisen, dass die gewonnenen Gleichungen überhaupt nur einer Kurve angehören.

Wenn wir aber die Parametergleichungen der Kurve durch jene des Axenkegels und eine der die Kurve enthaltenden F_3 (oder F_4) ersetzen, und dabei die allgemeinen Parameterkoeffizienten der konfokalen Schar anwenden, so verschwindet der Parameter μ in den Kurvengleichungen von selbst, und es zeigt sich so auf's Neue, dass konfokale Flächen den nämlichen Axenkomplex und die nämlichen Axenfusspunkte haben. Denn sei die Gleichung der konfokalen Schar (mit P als Anfang der Koordinaten:)

$$\frac{(x+\alpha)^2}{a+\mu} + \frac{(y+\beta)^2}{b+\mu} + \frac{(z+\gamma)^2}{c+\mu} - 1 = 0 \text{ oder}$$

$$\frac{x^2}{a+\mu} + \frac{y^2}{b+\mu} + \frac{z^2}{c+\mu} + \frac{2\alpha}{a+\mu}x + \frac{2\beta}{b+\mu}y + \frac{2\gamma}{c+\mu}z + \frac{\alpha^2}{a+\mu} + \frac{\beta^2}{b+\mu} + \frac{\gamma^2}{c+\mu} - 1 = 0,$$

so haben wir in die Gleichungen des Axenkegels und einer F_3 einzuführen:

$$a_{11} \equiv \frac{1}{a+\mu};\ a_{22} = \frac{1}{b+\mu} \ldots\ a_{14} \equiv \frac{\alpha}{a+\mu} \ldots$$

$$a_{44} \equiv \frac{\alpha^2}{a+\mu} + \frac{\beta^2}{b+\mu} + \frac{\gamma^2}{c+\mu} - 1$$

Die Gleichung des Axenkegels ist, (wenn man Seite 22 x durch $\frac{x}{a_{14}}$ ersetzt):

$$a_{34}(a_{11} - a_{22})\,xy + \alpha_{14}(a_{22} - a_{33})\,yz + a_{24}(a_{33} - a_{11})\,xz = 0$$

Durch die erwähnte Einführung folgt:

$$\frac{\gamma}{c+\mu} \cdot \left(\frac{1}{a+\mu} - \frac{1}{b+\mu}\right) xy + \ldots . \text{ etc.} = o$$

Durch Multiplikation mit $(c+\mu)\ (a+\mu)\ (b+\mu)$ wird die Gleichung des Axenkegels von μ befreit, nämlich:

$$I\ \gamma(b-a)\,xy + \alpha(c-b)\,yz + \beta(a-c)\,xz = o$$

Schreiben wir nun ferner z. B. die zum Werte (1, 1, 1) gehörige F_3 [konf. Seite 23] mit ausführlichen Koeffizienten und ersetzen x durch $\frac{x}{a_{14}}$ etc. so erhalten wir die Gleichung:

$$\frac{a_{11}\ a_{24}}{a_{11}-a_{22}} x^3 - \frac{a_{22}\ a_{14}}{a_{11}-a_{22}} x^2 y + \frac{a_{11}\ a_{24}}{a_{11}-a_{22}} xy^2 - \frac{a_{22} a^2_{14}}{a_{11}-a_{22}} y^3$$

$$+ \frac{a_{11}\ a_{34}}{a_{11}-a_{33}} xyz - \frac{a_{33}\ a_{14}}{a_{11}-a_{33}} yz^2 + \frac{a_{14}\ a_{24}}{a_{11}-a_{22}} x^2$$

$$- \frac{a_{14}\ a_{24}}{a_{11}-a_{22}} y^2 \qquad - \frac{a_{34}\ a_{14}}{a_{11}-a_{33}} yz$$

$$+ \left\{ - \frac{a_{14}^2}{a_{11}-a_{22}} + \frac{a_{24}^2}{a_{11}-a_{22}} + \frac{a_{34}^2}{a_{11}-a_{33}} + a_{44} \right\} xy = o$$

Nun ist $\frac{a_{11}\ a_{24}}{a_{11}-a_{22}} \equiv \frac{\frac{1}{a+\mu} \times \frac{\beta}{b+\mu}}{\frac{1}{a+\mu} - \frac{1}{b+\mu}} = \frac{\beta}{b-a}$. Man sieht sofort,

dass die 9 ersten Koeffizienten, in denen immer der Zähler und der Nenner die gleichen ersten Indizes haben, durch Erweitern den Parameter μ verlieren. — Der Koeffizient von xy wird:

$$\frac{-\frac{\alpha^2}{(a+\mu)^2}}{\frac{1}{a+\mu} - \frac{1}{b+\mu}} + \frac{\frac{\beta^2}{(b+\mu)^2}}{\frac{1}{a+\mu} - \frac{1}{b+\mu}} + \frac{\frac{\gamma^2}{(c+\mu)^2}}{\frac{1}{a+\mu} - \frac{1}{c+\mu}}$$

$$+ \frac{\alpha^2}{a+\mu} + \frac{\beta^2}{b+\mu} + \frac{\gamma^2}{c+\mu} - 1$$

Ziehen wir die untereinanderstehenden Brüche zusammen, so erhalten wir z. B.

$$\frac{\alpha^2}{a+\mu}\left\{1-\frac{\frac{1}{a+\mu}}{\frac{1}{a+\mu}-\frac{1}{b+\mu}}\right\}=\frac{\alpha^2}{\alpha+\mu}\times\frac{-\frac{1}{b+\mu}}{\frac{1}{a+\mu}-\frac{1}{b+\mu}}=\frac{-\alpha^2}{b-a}$$

und wir erkennen, dass auch bei allen folgenden Gliederpaaren der Parameter wegfällt.

Die Gleichung der F_3 wird:

$$\text{II. } \frac{\beta}{b-a}x^3+\frac{\alpha}{a-b}x^2y+\frac{\beta}{b-a}xy^2+\frac{\alpha}{a-b}y^3+\frac{\gamma}{c-a}xyz$$
$$+\frac{\alpha}{a-c}yz^2+\frac{\alpha\beta}{b-a}x^2+\frac{\alpha\beta}{a-b}y^2+\frac{\alpha\gamma}{a-c}yz$$
$$+\left\{\frac{\alpha^2}{a-b}+\frac{\beta^2}{b-a}+\frac{\gamma^2}{c-a}-1\right\}xy=0$$

Die drei noch übrigen Flächen dritter Ordnung, zu deren Bildung Werte aus der dritten Kolonne verwendet werden, haben weit kompliziertere Gleichungen.

Die zum Werte (3, 1, 1,) zugehörige ist von der Form:

$$c_1y^3+c_2z^3+c_3x^2y+c_4x^2z+c_5xy^2+c_6yz^2+c_7y^2z+c_8xz^2+d_9xyz$$
$$+d_{10}xy+d_{11}xz+c_{12}y^2+d_{13}yz+c_{14}z^2=0$$

Nur die mit d bezeichneten Koeffizienten können auch dann zu Null werden, wenn P nicht in einer Symmetrieebene liegt und die konfokalen Flächen nicht von besonderer Art sind.

Wenn wir auf gleiche Weise, wie früher untersuchen, wie beschaffen der Doppelpunkt im Anfange ist, so finden wir, dass er nur biplanar ist, wenn $d_{10}\ c_{14}+d_{11}^2\ c_{12}=d_{10}\ d_{11}\ d_{13}$, welche Relation im allgemeinen nicht erfüllt ist, wie schon der Anfang der umständlichen Substitution der ausführlichen Koeffizienten in diese Relation beweist.

Unsere F_3 enthält die X Axe als Gerade, welche letztere unsere c_5 in dem Punkte $x=-\frac{a_{14}}{a_{11}}$, $y=z=0$ schneidet. Daher kann nur dieser Punkt als Doppelpunkt der Durchdringungskurve des Axenkegels mit der F_3 Doppelpunkt der F_3 fein, wenn sie noch einen

zweiten auf der X Axe besitzt. Bilden wir aber $F\left(y, z, x + \frac{a_{14}}{a_{11}}\right)$ so erhalten wir als Koeffizienten lineärer Glieder, welche im Falle eines Doppelpunktes identisch verschwinden müssen: $c_3\ a_{14} + d_{10}\ a_{11}$, und $c_4\ a_{14} + d_{11}\ a_{11}$, welche im allgemeinen von Null verschieden sind.

Die Gleichung unserer F_3 hat bezüglich der Koeffizienten c und d die allgemeinste Form, die sie mit Rücksicht auf ihren Doppelpunkt im Anfange und der auf ihr liegenden X Axe haben kann; daher wird sie im allgemeinen keinen weiteren Doppelpunkt besitzen, und von ihren Geraden werden:

1.) die X Axe unsere c_5 viermal (darunter dreimal im Anfange) treffen,

2.) die 5 übrigen Geraden $a_1\ a_2 \ldots a_5$ durch P nur diesen (dreifachen) Punkt mit c_5 gemeinsam haben,

3.) die $\frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$ Geraden in den Ebenen $a_i\ a_k$ die c_5 in je zwei reellen oder imaginären Punkten schneiden,

4.) die 5 Geraden in den durch die X Axe und je eine Geraden a_i bestimmten Ebenen unserer c_5 in einem reellen Punkte begegnen.

Unsere F_3 hatten wir durch die Substitution (311) erhalten, und die zwei anderen, welche dieser ähnlich gebildet sind, erhalten wir durch Benützung der Werte (2 2 3) und (1 3 2). Fasst man x y z als $x_1\ x_2\ x_3$ auf, so gehen dieselben durch Vertauschung der untereinander stehenden Indizes in den Schematen $\binom{1\ 3}{3\ 1}$ und $\binom{1\ 2}{2\ 1}$ aus der ersten hervor.

Von den Flächen vierter Ordnung, auf welchen unsere Kurve liegt, haben jene zwei die einfachsten Gleichungen, für welche wir zur Substitution in die Gleichung der Polarebene solche Werte aus der Tabelle Seite 22 entnehmen, von denen die Nenner y, z und x sind.

Die eine derselben z. B. (1, 2, 1) ist von der Form:

$$k_0x^3z + k_1y^3x + k_2z^3y + k_3x^2yz + k_4xy^2z + k_6x^2z + k_7xy^2 + k_8yz^2 + k_9xyz = 0$$

Nur k_9 kann auch bei einer nicht ausgezeichneten Lage von P und nicht besonderen Form der F_2, welche unserer Aufgabe zugrunde liegt, den Wert Null annehmen. Die Fläche hat einen drei-

fachen Punkt im Anfange; unter den 12 durch den Anfang gehenden Geraden befinden sich die drei Koordinatenaxen, in welchen der Axenkegel K_2 diese F_4 ausser der c_5 noch schneidet.

Die andere F_5 dieser Art erhalten wir aus der vorhergehenden durch die Substitution der Indizes $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, wenn man x, y, z, als x_1 x_2 x_3 auffasst.

Benützt man auf Seite 22 die Werte (3, 3, 3), so erhält man eine Fläche, deren Gleichung symmetrisch ist in Bezug auf die Indizes 1, 2, 3; ihre Form ist, abgesehen von den Koeffizienten

$$\Sigma x^3y + \Sigma x^2yz + \Sigma x^2y^2 + \Sigma x^2y + xyz = 0.$$

§ 4.

Synthetische Betrachtung der Kurve.

Es dürfte von einigem geometrischen Interesse sein zu untersuchen, welchen Aufschluss über die Gestalt der Kurve man ohne Anwendung der Rechnung erhalten kann. Es werden in diesen Paragraphen die bei Reye bewiesenen Thatsachen vorausgesetzt, dass 1.) die Axen durch einen Punkt M einen Kegel 2. Ordnung bilden, 2.) jeder Punkt im Raume Fusspunkt von drei zu einander senkrechten Axen ist.

Da also alle Axen durch M einen K_2 bilden, so müssen auch deren Fusspunkte und somit unsere ganze Kurve auf diesem Kegel liegen, und zwar hat jede Leitlinie des Kegels ausserhalb M einen und nur einen Fusspunkt, und schneidet somit die Kurve nur einmal. Daher besitzt die Kurve ausserhalb M keinen vielfachen Punkt. Denn wäre x ein solcher, so müsste eine Leitlinie My, welche genügend nahe an x liegt, mehrere Punkte ausserhalb M mit der Kurve gemeinsam haben.

Auch kann die Kurve keinen isolierten Punkt z haben; denn sonst müsste entweder die Leitlinie Mz ausserhalb M noch einen weiteren Kurvenpunkt enthalten, oder eine Leitlinie genügend nahe an Mz hätte ausserhalb M gar keinen Kurvenpunkt. Die Kurve verläuft also kontinuierlich und kann dadurch gezeichnet werden, dass man eine Gerade l den Kegel beschreiben lässt und in jeder Lage derselben ihren Fusspunkt λ fixiert.

Die Kurve ist daher unikursal, d. h. sie kann in einem Zuge durchlaufen werden, wenn man den Durchgang durch einen unendlich fernen Punkt nicht als Unterbrechung der Stetigkeit betrachtet.

Sie hat ferner einen einzigen unendlich fernen Punkt. Denn, wenn Mw eine Axe mit unendlich fernen Fusspunkte ist, so ist die unendlich ferne Ebene Polarebene eines auf Mw liegenden Punktes, d. h. Mw ist ein Durchmesser der F_2, auf welche sich unser Problem bezieht. Es geht aber durch M nur ein Durchmesser dieser F_2 also hat unsere Kurve nur einen unendlich fernen Punkt. Unsere Kurve hat ferner keine dreipunktig berührenden Geraden („stationäre Generatrixen" der zur Kurve gehörigen Developpablen); denn eine solche müsste auch drei (einander unendlich nahe) Punkte mit dem Axenkegel, auf dem die Kurve liegt, gemeinsam haben und somit ganz auf demselben liegen und eine Leitlinie sein; eine solche kann aber nur einen Punkt mit der Kurve gemeinsam haben.

Nun müssen wir noch den Verlauf der Kurve in der Nähe des Punktes M untersuchen. Derselbe ist ein dreifacher Punkt der Kurve, weil in ihm drei Axen ihre Fusspunkte haben. Bewegen wir eine Leitlinie l des Kegels so, dass ihr Fusspunkt immer näher an M rückt und zuletzt damit zusammenfällt, so wird sie zur Tangente in M, und es folgt, dass die drei Tangenten in M jene oben erwähnten drei zu einander senkrechten Axen sind, deren Fusspunkte in M liegen.

Da wir nun bereits wissen, dass unsere Kurve unikursal ist, so folgt weiter:

Beginnen wir mit der Bewegung der Leitlinie l aus jener Lage, in welcher ihr Fuss- und Kurvenpunkt ξ im Unendlichen liegt, so wird letzterer nach einiger Zeit den Punkt M erreichen und l berührt die Kurve in M zum erstenmale. Bewegt man l weiter bis es zur zweiten Tangentenlage in M kommt, so kann auf diesem Wege ξ nicht ins Unendliche rücken, weil sonst unsere Kurve mindestens zwei unendlich ferne Punkte hätte, es beschreibt also ξ eine Schleife, deren Zweige sich in M senkrecht durchschneiden; dasselbe findet ein zweitesmal statt, während l aus der Lage der zweiten in die der dritten Tangente (in M) übergeht, und erst nachdem auch diese passiert ist, rückt ξ allmählig ins Unendliche, wobei l wieder der Ausgangslage zustrebt. Die zwei Zweige, mit welchen die Kurve ins Unendliche sich erstreckt, ziehen übrigens nach verschiedenen Richtungen des Durchmessers Mw, den wir als Ausgangslage von l annahmen; denn sonst würden diese Zweige im Unendlichen eine Spitze bilden, die Mw zur Tangente hätte, während Mw als Axe nur einen Fuss- und Kurvenpunkt enthalten kann.

Nun können wir noch die Ordnung der Kurve bestimmen:

1) legen wir durch M eine Ebene, so dass diese den Kegel in zwei Axen Ma und Mb schneidet, so enthält sie die zwei Fuss- und

Kurvenpunkte von Ma und Mb und ausserdem den dreifachen Kurvenpunkt M; daher ist die Kurve von der fünften Ordnung.

2) Reye hat gezeigt*), dass in der Symmetrieebene σ die Schnittpunkte s aller Axen und die Schnittgeraden der dazugehörigen Polarebenen ein Polarsystem bilden und dass die Ordnungskurve dieses Polarsystems, „die Fokalkurve", demzufolge Ort der Punkte ist, die zugleich Fusspunkte für alle durch sie gehenden Axen sind. Ist nun MU eine Axe mit dem Fusspunkt U in σ und MU nicht ⊥ σ, so ist U ein Punkt der Fokalkurve und senkrecht auf der Tangente der Kurve in U, welche der Schnitt der zu MU gehörigen Polarebene mit σ ist. Daher erhalten wir alle Punkte unserer Raumkurve mit der Symmetrieebene, wenn wir aus der Projektion M^1 von M auf die σ die Normalen zur Fokalkurve ziehen.

Deren gibt es aber 4, und ausserdem ist noch M^1 selbst ein Punkt der Raumkurve, weil das Lot MM^1 durch den (unendlich fernen) Pol von s geht.

Also ist unsere Raumkurve von der 5. Ordnung.

Analog der soeben beendeten synthetischen Diskussion des allgemeinen Falles lässt sich auch der spezielle behandeln, in welchem der Komplexkegel M in zwei singuläre Strahlenbüschel 1. 0. zerfällt, wenn nämlich M in einer Symmetrieebene σ liegt und von der Raumkurve eine Schleife als Kreis in einer Lotebene zu σ sich abzweigt, während als zweiter Zweig eine ebene Kurve dritter Ordnung in σ übrig bleibt. Wir brauchen diesem auf Seite 12 f. f. analytisch behandelten Falle um so weniger eine synthetische Diskussion zuzufügen, als dieselbe schon in Kürze durch das Reye'sche Werk geboten ist. (Seite 182 und 183.)

§ 6.

Ueber den Ort der Raumkurven, deren Axenkegel ihre Spitzen auf einem Durchmesser der konfokalen Flächen haben.

Wenn man das Zentrum des Axenkegels M eine Gerade, z. B. einen Durchmesser d der konfokalen Schar durchlaufen lässt, so beschreibt die Kurve c der Normalenfusspunkte eine Fläche Φ, und

---

* Seite 186.

wenn man d um den Mittelpunkt Z der Schar dreht, so entsteht eine ∞^2 Schar von Flächen Φ, welche alle zu einem Axenkomplex gehörigen Fusspunktkurven c enthalten.

Alle diese Flächen gehen durch die Hauptaxen und durch die Fokalkurven der konfokalen Schar.

Denn die Hauptaxen bilden die zum Axenkegel Z gehörige Fusspunktskurve c für alle Φ. Ferner liegen in jedem Fokalpunkte P die Fusspunkte aller Axen eines (singulären) Büschels dessen Ebene jeden beliebigen Durchmesser d in einem Punkte D schneidet, so dass jeder Fokalpunkt in einem Bündel von Curven c liegt, welche das Bündel der Durchmesser d schneiden.

Keine zwei Φ haben irgend eine Kurve c gemeinsam; denn zu jeder c gehört ein bestimmter Axenkegel M, ein bestimmter Durchmesser $d \equiv ZM$, und demzufolge eine bestimmte Fläche Φ.

Zwei Flächen Φ_1 und Φ_2, die zu den Durchmessern ZM_1 und ZM_2 gehören, haben ausser den Hauptaxen und den Fokalkegelschnitten noch die gleichseitige Fusspunkthyperbel der Durchmesserebene $M_1 Z M_2$ gemein.

(Reye Seite 181, diese Abhandlung Seite 19*.) Denn alle Axen haben ihre Fusspunkte in der erwähnten Hyperbel und schneiden sowohl ZM_1 als auch ZM_2 und gehören daher zu Komplexkegeln, deren Zentra auf diesen Durchmessern liegen.

Einen Punkt U des Raumes ist Fusspunkt von 3 Axen, in ihm schneiden sich alle Raumkurven, deren Axenkegel ihre Spitzen in einer der 3 Axen haben, und alle Φ, welche zu einem Durchmesser der Ebenen Z_a Z_b Z_d gehören.

Wenden wir uns jetzt zur Betrachtung einer einzelnen Φ.

Rückt das Zentrum des Komplexkegels M auf ZM fort, so können in jedem Punkte A von ZM drei (zu einander senkrechte) Tangentenebenen an die auf der Φ liegenden c_5, welche in A ihren dreifachen Punkt hat, gelegt werden. Diese Tangentenebenen berühren gleichzeitig auch die Φ in A, daher ist jeder Punkt A ein dreifacher Punkt und ZM selbst eine dreifache Gerade von Φ. Andere Gerade der Φ sind: 1) die 3 Hauptaxen der konfokalen Schar, wie wir bereits wissen, 2) die Projektionen von ZM auf die

---

* Während in einer beliebigen Ebene die Komplexstrahlen einen Büschel 2ter Ordnung bilden, zerfällt dasselbe für jede Durchmesserebene, welche, weil durch den Hauptpunkt Z des Komplexes gehend, singulär ist, in zwei s_1; das eine ist das Durchmesserbüschel und hat seine Fusspunkte im Unendlichen, das andere ist ein Parallelbüschel und hat seine Fusspunkte auf der genannten Hyperbel.

drei Symmetrieebenen. Denn legen wir durch irgend einen Punkt der ZM eine Senkrechte auf eine Symmetrieebene, so ist dieselbe eine Axe und ihr Schnitt mit der Symmetrieebene Axenfusspunkt. Also sind alle Punkte der Projektionen von ZM auf die Symmetrieebenen Fusspunkte von Axen, die den Komplexkegeln M angehören und somit auf der Φ liegen.

Andere Gerade als die bereits erwähnten gibt es auf der Φ nicht. Denn sei 1.) a eine Gerade der Φ, welche D schneidet, so ist a ein Zweig des Ortes der Fusspunkte in der Ebene ad. Letzterer ist aber eine gleichseitige Hyperbel, welche höchstens in ihre Asymptoten zusammenschrumpfen könnte. Dies tritt ein, wenn wir durch ZM eine Lotebene auf eine Symmetrieebene σ errichten; dann sind die zwei Geraden eine Hauptaxe und eine Projektion von ZM. (Vergleiche Seite 19, Schluss.)*) 2) Wäre b eine Gerade der Φ, welche d nicht schneidet, so schneidet sie jede durch d gehende Ebene δ in einem Punkte D, so dass MD eine in δ liegende Axe eines die Φ erzeugenden Komplexkegels M ist. Nun werden wir aber gleich zeigen, dass alle Komplexkegel M sich längs d berühren und daher in ihrer Berührebene S keine Axe MD ausser d existieren kann. Also gibt es auf Φ keine Gerade b, welche d nicht schneidet. — Sind nämlich M und M_1 zwei Kegelzentra auf d und ist a eine Axe durch M, so ist in der Durchmesserebene ad auch die durch M_1 gehende Axe a_1 parallel zu a. Wählt man a unendlich nahe an d, d. h. wählt man die Tangentenebene durch d an den Kegel m, so ist in dieser a^1 wieder parallel a und somit unendlich nahe an d, d. h. $ad = a^1d$ ist auch Tangentenebene des Kegels M_1. (Siehe auch Reye Seite 139 und 170.)

---

* Synthetischer Beweis unter Benützung der Eigenschaften des Komplexes: Die Fusspunktkurve in der Ebene ad wird erzeugt durch 2 zueinander rechtwinklige Parallelbüschel, (Reye S. 181) die nur dann perspektivisch liegen und eine Gerade erzeugen, wenn entweder ihre unendlich fernen Strahlen zusammenfallen, was nur bei einer hier nicht in betracht kommenden Schar von Paraboloiden eintritt, oder wenn eines der beiden Büschel sich auf einen einzigen Strahl reduziert. Dies kann nur in einer Lotebene geschehen. Denn die Axen in der Lotebene ad, die zugleich Durchmesserebene ist, haben als Polargerade Axen in σ (deren ∞ ferner Pol in ad liegt), die, durch den Pol der Durchmesserebene ad gehend, einander parallel sind. Errichten wir von den Schnittpunkten dieser Axen mit ad Lote auf die Axen in ad, so fallen diese alle in den Schnitt $\alpha \equiv \sigma \equiv$ ad zusammen, und dieser Schnitt ist sowohl die Projektion von ZM als auch ein Teil der degenerierten Hyperbel.

Für eine hier nicht zu betrachtende konfokale Schar von Paraboloiden enthalten die Flächen Φ unendlich viele Gerade, im allgemeinen Falle sind aber, wie gezeigt, die Hauptaxen, der Durchmesser und seine Projektionen die einzigen Geraden der Fläche Φ.

Kegelschnitte der Φ: Wir wissen bereits, dass die Fokalkegelschnitte der konfokalen Schar auf der Φ liegen; ausserdem schneiden alle Ebenen durch ZM die Φ in gleichseitigen Hyperbeln; dieselbe schneiden die Symmetrieebenen in je zwei Punkten der Fokalkegelschnitte. Für die drei Ebenen durch ZM, welche senkrecht zu je einer Symmetrieebene sind, degenerieren die Hyperbeln in je eine Hauptaxe und eine Projektion von ZM.

Unsere Φ ist von der fünften Ordnung. Denn eine Ebene ε des Büschels ZM schneidet die Φ 1.) in der dreifachen Geraden ZM, 2.) in einer Hyperbel, 3.) sonst in keinem Punkte.

Nämlich alle Axen, welche ihre Fusspunkte in ε haben und ZM = d schneiden, liegen ganz in ε und haben daher ihre Fusspunkte in der erwähnten Hyperbel.

Unter Benützung der Thatsache, dass Φ von der 5ten Ordnung ist, lässt sich einfacher als vorher beweisen, dass auf ihr keine Gerade m liegt, welche d nicht schneidet. Denn seien a_1 a_2 s_3 die Hauptaxen der Schar, d_1 d_2 d_3 die Projektionen von d auf die Symmetrieebenen, so hat die Ebene a_1 d d_1 ausserhalb dieser 3 Geraden keinen Punkt mit Φ gemein; es muss daher m entweder a_1 oder d_1 und analog auch a_2 oder d_2 sowie a_3 oder d_3 schneiden. Da aber irgend 3 von den 6 Geraden a_1 a_2 a_3 d_1 d_2 d_3 ein Dreikant bilden, so wäre dies nur im Punkte Z möglich und es gibt somit kein m.

Die Ebenenbüschel d_1 d_2 und d_3 schneiden die Φ in Kurven 4. Ordnung, welche für die drei Ebenen d_1 d_2, d_2 d_3, d_3 d_1 in je eine Kurve 3. Ordnung und eine weitere Gerade zerfallen.

Die Ebenen durch eine Hauptaxe haben ebenfalls Durchschnittskurven der 4. Ordnung, nur die Symmetrieebenen schneiden Φ in drei Geraden und einem Kegelschnitt, ferner enthalten die drei Projektionsebenen von d fünf Gerade der Φ (wobei d dreifach gezählt ist) und sind die Schmiegungsebenen der Φ in Z, weil Z offenbar ein fünffacher Punkt ihrer Durchdringungskurve ist.

Unsere Φ_5 hat im Endlichen keinen Doppelpunkt; denn wäre X ein solcher, so würde die Fusspunkthyperbel in der Durchmesserebene XZM in zwei Gerade zerfallen, die sich in X schneiden, während die Asymptoten einer solchen Hyperbel stets durch Z gehen (Seite 19, Reye S. 181) und letztere daher nicht in zwei Gerade XU, XV degenerieren kann.

Betrachten wir die Fusspunktkurven c_5 auf unserer Φ_5. Irgend zwei Axenkegel, welche ihr Zentrum auf ZM haben, berühren sich längs ZM und schneiden sich nur auf der unendlich fernen Ebene (Reye 139 und 170). Daher schneiden sich alle Kurven c_5 in einem einzigen, dem unendlich fernen Punkte von ZM, und keine zwei Kurven haben im Endlichen einen Punkt gemeinsam.

Auch daraus folgt, dass die Φ ausserhalb ZM keinen vielfachen Punkt besitzt. Denn denken wir uns die Φ erzeugt, indem wir von einer c_5 zu der ihr unendlich nahen übergehen, so wird hiebei kein Punkt des Raumes zweimal berührt, und es entsteht ausserhalb ZM keinerlei Singularität.

Ferner folgt, dass unsere Φ ein Band mit zwei einander nur in ZM schneidenden Schleifen bildet, Schleifen, deren Querschnitte a) bei Z unendlich gross sind, da die durch Z gehenden Hauptaxen diese unendlich grossen Schleifen bilden, b) für jeden im Endlichen gelegenen Punkt von ZM von endlicher Grösse sind, c) im unendlich fernen Punkte von ZM unendlich klein werden. Denn die Fusspunktkurve c_5, die zum unendlich fernen Punkte A von ZM gehört, ist eine gleichseitige Hyperbel, deren eine Asymptote ZM ist und die keine Schleife in A hat.

Diese Hyperbel, deren Punkte alle Fusspunkte von Axen sind, die dem unendlich fernen Komplexkegel auf ZM angehören, wird von keiner c_5 in einem endlichen Punkte getroffen; alle anderen Hyperbeln auf der Φ werden von jeder c_5 in je einem Punkte ausserhalb ZM getroffen. Denn alle Axen irgend einer Ebene durch ZM schneiden, da sie einander parallel sind, die ZM in lauter verschiedenen Punkten; sie gehören daher lauter verschiedenen Komplexkegeln und ihre Fusspunkte auf der Hyperbel lauter verschiedenen c_5 an. Ferner können auch von keiner c_5 zwei Punkte auf einer Hyperbel liegen, weil sonst entweder auf einer Axe zwei Fusspunkte sein, oder zwei Parallele sich in einem Punkt der ZM schneiden müssten.

Wie also durch jeden Punkt O der Φ eine c_5 geht, so auch (ZM ausgenommen, durch deren Punkte je drei Hyperbeln gehen) eine Hyperbel, diejenige nämlich, welche durch die Durchmesserebene OZM bestimmt ist. Man kann also unsere Φ auch als Ort aller Fusspunkthyperbeln betrachten, welche durch die Ebenen des Büschels ZM bestimmt sind.

Für unsere Φ_5 können wir folgendermassen eine Gleichung aufstellen:

Die Gleichung der die konfokale Schar vertretenden F_2 sei:

$$1.) \quad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44} = 0$$

Die Polarebene von (α, β, γ):

$$2.)\quad a_{11}\alpha x + a_{22}\beta y + a_{33}\gamma z + a_{44} = 0$$

Das Lot von (α, β, γ) auf die Polarebene:

$$\frac{x-\alpha}{a_{11}\alpha} = \frac{y-\beta}{a_{22}\beta} = \frac{z-\gamma}{a_{33}\gamma} \text{ oder:}$$

$$3.)\quad \frac{x}{a_{11}\alpha} - \frac{y}{a_{22}\beta} = \frac{1}{a_{11}} - \frac{1}{a_{22}};$$

$$4.)\quad \frac{x}{a_{11}\alpha} - \frac{z}{a_{33}\gamma} = \frac{1}{a_{11}} - \frac{1}{a_{33}}$$

$$\left[\text{Sei } b_{ik} = \frac{1}{a_{ii}} - \frac{1}{a_{kk}};\right]$$

Seien ferner die Gleichungen des Durchmessers D, auf dem sich unser Komplexkegel bewegt:

$$5.)\ px + qy = 0, \quad 6.)\ px + rz = 0$$

so müssen sämtliche Axen, die diesem Komplexkegel angehören, den Durchmesser D schneiden; die Bedingung hiefür ist die gleich Null gesetzte Determinante des aus den Gleichungen 3—6 gebildeten Systems, also:

$$7.)\quad \begin{vmatrix} \frac{1}{a_{11}\alpha} & -\frac{1}{a_{22}\beta} & 0 & b_{21} \\ \frac{1}{a_{11}\alpha} & 0 & -\frac{1}{a_{33}\gamma} & b_{31} \\ p & +q & 0 & 0 \\ p & 0 & +r & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Diese Determinante entwickelnd, erhalten wir:

$$\frac{pr\ b_{31}}{a_{22}\ \beta} + \frac{qr\ b_{31}}{a_{11}\ \alpha} + \frac{qr\ b_{12}}{a_{11}\ \alpha} + \frac{pq\ b_{12}}{a_{33}\ \gamma} = 0$$

und da $b_{31} + b_{12} = b_{32}$, wird unsere Gleichung:

$$8.)\quad \begin{cases} \dfrac{qr\,b_{32}}{a_{11}\alpha} + \dfrac{pr\,b_{31}}{a_{22}\beta} + \dfrac{pq\,b_{12}}{a_{33}\gamma} = 0 \\ \text{oder} \qquad \dfrac{k_1}{\alpha} + \dfrac{k_2}{\beta} + \dfrac{k_3}{\gamma} = 0 \end{cases}$$

Es müssen also die Pole (α, β, γ), welche auf den in betracht kommenden Komplexgeraden liegen, die Gleichungen erfüllen:

$$\frac{x}{a_{11}\alpha} - \frac{y}{a_{22}\beta} - b_{12} = 0$$

$$\frac{x}{a_{11}\alpha} - \frac{z}{a_{33}\gamma} - b_{13} = 0$$

$$\frac{k_1}{\alpha} + \frac{k_2}{\beta} + \frac{k_3}{\gamma} = 0$$

Setzen wir die sich daraus ergebenden Werte von α, β, γ in die Gleichung der Polarebene (2) ein, so erhalten wir offenbar den Ort jener Fusspunkte, deren zugehörige Pole die vorstehende Bedingung erfüllen und deren zugehörige Axen den Durchmesser D schneiden, d. h. wir erhalten die Gleichung der Fläche Φ.

Nun findet sich, wenn man $c_{ik} \equiv a_{ii} - a_{kk}$ setzt:

$$\alpha = \frac{k_1 a_{11}\, yz + k_2 a_{22}\, xz + k_3 a_{33}\, xy}{k_2 c_{21}\, z + k_3 c_{31}\, y} \equiv \frac{m}{u}$$

$$\beta = \frac{m}{k_3 c_{32}\, x + k_1 c_{12}\, z} \equiv \frac{m}{v};$$

$$\gamma = \frac{m}{k_1 c_{13}\, y + k_2 c_{23}\, x} \equiv \frac{m}{w}$$

Wir setzen dies in die Polarebenen-Gleichung ein:

$$a_{11}\alpha x + a_{22}\beta y + a_{33}\gamma z + a_{44} = 0$$

$$9.)\quad m\,.\,(a_{11}\,vwx + a_{22}\,uwy + a_{33}\,uvz) + a_{44}\,uvw = o \equiv \Phi.$$

Eine einfache Rechnung lehrt, dass u, v, w, sich nur durch konstante Faktoren von den Formen $px + qy$, $px + rz$, $rz - qy$ unterscheiden, und also $u = o$ $v = o$ $w = o$ die Gleichungen der Projektionsebenen des Durchmessers D auf die Symmetrieebene der F_2 sind.

Dass D eine dreifache Gerade der Φ ist, erkennen wir folgendermassen:

$$\text{Der Kegel } m \equiv k_1 a_{11} yz + k_2 a_{22} xz + k_3 a_{33} xy = 0$$
$$\equiv qr b_{32} yz + pr b_{31} xz + pq b_{12} xy = 0$$

enthält die Gerade $w = v = o$ oder

$$px + qy = px + rz = 0,$$

denn durch Substitution von $qy = -pz$ und $rz = -px$ in die Kegelgleichung folgt:

$$m = p^2 x^2 (b_{32} + b_{13} + b_{21})$$
$$= p^2 x^2 \left(\frac{1}{a_{33}} - \frac{1}{a_{22}} + \frac{1}{a_{11}} - \frac{1}{a_{33}} + \frac{1}{a_{22}} - \frac{1}{a_{11}} \right)$$

welch letzterer Ausdruck für jeden Wert von x verschwindet. Dass die Fläche Φ die D wenigstens als zweifache Gerade habe, erhellt unmittelbar aus der Gleichung 9.) selbst; es ist ferner $\frac{d^2 \Phi}{dx_k \, dx_l}$ (unter x_1 x_2 x_3 die Koordinaten x, y, z verstanden) ein Aggregat von Produkten, deren jedes mindestens einen der Faktoren m, u, v, w, undifferenziert enthält; daher ist für $u = o = w = o = m$ jeder zweite Differentialquotient von Φ gleich Null, daher jeder Punkt von D ein dreifacher der Fläche Φ.

Gerade der Φ erhalten wir:

1.) $x = y = o$; denn hiefür wird $w = o$ und $m = o$ und alle Glieder von Φ verschwinden;

analog folgt 2.) $x = z = o$; 3.) $y = z = o$.

Weitere Gerade sind:

4.) $u = x = o$ 5.) $v = y = o$ 6.) $w = z = o$

Der Kegel 3. Ordnung $uvw = o$ besteht aus drei Ebenen, jede derselben berührt die Φ fünfpunktig im Anfange; wie denn auch der Schnitt z. B. der Ebene $u = o$ mit Φ aus den Geraden $u = w = o$ (dreifach), $u = x = o$, und $y = z = o$ besteht, welche als Gesamtschnittkurve betrachtet, im Anfange einen 5fachen Punkt bilden.

Um weitere Gerade der Fläche zu finden, könnten wir zuerst den Durchschnitt der Ebenen u, v, w, mit dem Kegel m bestimmen; und würden z. B. finden, dass $u = o$ in der X Axe und in D den

Kegel m durchschneidet, und indem wir auf ein analoges Verhalten der Ebenen v und w schliessen, folgt, dass wir durch den Schnitt des Kegels mit den Projektionsebenen von D keine neuen Geraden der Φ erhalten. Suchen wir ferner den Durchschnitt der letztgenannten Ebenen mit dem Kegel $K_3 \equiv a_{11}\ v\,w\,x + a_{22}\ u\,w\,y + a_{33}\ u\,v\,z = o$, so sehen wir z. B. dass u mit K_3 und mit Φ die Durchschnitte hat: $u = v = o$, (zweifach,) $u = x = o$.

Da wir also auch hier keine neuen Geraden der Φ erhalten, könnten wir endlich den Weg einschlagen, welchen Nöther in seiner Abhandlung „über Flächen n^{ter} Ordnung mit einer $(n-2)$ fachen Geraden*)" angegeben hat. Wir könnten zuerst in der Gleichung 9.) von Φ das w durch $u + kv$ ersetzen, wobei k eine leicht bestimmbare Constante ist und dann Φ durch das Ebenenbüschel $u - \lambda v = o$ in Kegelschnitten schneiden; (diese sind nichts anderes als die Fusspunktshyperbeln der Durchmesserebenen durch D); die Gleichungen derselben wären:

$$10.)\ (l_1 \lambda + l_2)\ (n_1 \lambda^2 + n_2 \lambda + n_3) + a \lambda\ (\lambda + k) = o$$

$$11.)\ u - \lambda v = o;$$

dabei bedeuten die l und n lineare Funktionen der Koordinaten. Wir müssen dann die Bedingung aufstellen, dass die Ebene 11.) das Hyperboloid 10.) berührt, welche Bedingung bezüglich λ vom 11. Grade würde. Jede Wurzel λ bestimmte dann eine Ebene des Büschels $u - \lambda v = o$, welche das Hyperboloid und somit die Φ in zwei Geraden schnitte. Diese Gleichung 11. Grades hätte notwendig die 3 Wurzeln $\lambda = o$, $\lambda = \infty$, $\lambda = -k$, welche den 6 Geraden der Φ in den Ebenen u, v, w, entsprechen, und ausserdem noch 8 imaginäre Wurzeln, was aber durch blosse Betrachtung der betreffenden Gleichungen schwer zu erkennen sein dürfte.

Weisen wir jetzt die Fokalkegelschnitte auf unserer Φ nach. Setzen wir gleich in den Seite 40 bis 41 gewonnenen Ausgangsgleichungen $z = o$, was wir können, weil dadurch keiner der dort auftretenden Nenner verschwindet, so wird:

$$\alpha = \frac{a_{33}\ x}{c_{31}};\ \beta = \frac{a_{33}\ y}{c_{32}};\ \gamma = \frac{k_3\ a_{33}\ xy}{k_1\ c_{13}\ y + k_2\ c_{23}\ x}$$

und die Gleichung des Querschnittes der Φ mit der X Y Ebene:

$$a_{11}\ \alpha x + a_{22} \beta\ y + a_{33}\ yz + a_{44} = o$$

$$\text{oder}\quad 12.)\ \frac{a_{11}\ a_{33}\ x^2}{c_{31}} + \frac{a_{22}\ a_{33}\ y^2}{c_{32}} + a_{44} = o$$

*) Mathematische Annalen Bd. 3 pag. 175 ff.

Der Fokalkegelschnitt von

$$a_{11}\,x^2 + a_{22}\,y^2 + a_{33}\,z^2 + a_{44} = 0$$

oder $$\frac{x_2}{\left(-\frac{a_{44}}{a_{11}}\right)} + \frac{y^2}{\left(-\frac{a_{44}}{a_{22}}\right)} + \frac{z^2}{\left(-\frac{a_{44}}{a_{33}}\right)} = -1$$

für $z = 0$ ist:

$$\frac{x^2}{-\frac{a_{44}}{a_{11}} + \frac{a_{44}}{a_{33}}} + \frac{y^2}{-\frac{a_{44}}{a_{22}} + \frac{a_{44}}{a_{33}}} - 1 = 0$$

oder: $\dfrac{a_{11}\,a_{33}\,x^2}{a_{11} - a_{33}} + \dfrac{a_{22}\,a_{33}\,y^2}{a_{22} - a_{33}} - a_{44} = 0$, welche Gleichung mit 12.) identisch ist.

Das im synthetischen Teile über die ebenen Kurven dritter und vierter Ordnung auf der Φ Gesagte liesse sich hier höchstens durch die Anführung komplizierter Formeln erweitern; wir wollen darauf verzichten und nur noch für die Gleichung unserer Fläche eine andere für die Abbildung geeignete Form aufstellen.

Sei die Gleichung der die konfokale Schar vertretenden F_2 wieder:

$$F_2 \equiv a_{11}\,x^2 + a_{22}\,y^2 + a_{33}\,z^2 + a_{44} = 0$$

Wählen wir den Punkt ζ, η, ϑ, als neuen Koordinatenanfang, so wird die neue Gleichung der F_2:

$$a_{11}\,X^2 + a_{22}\,Y^2 + a_{33}\,Z^2 + 2a_{11}\,\xi\,X + 2a_{22}\,\eta\,Y + 2a_{33}\,\vartheta\,Z + (a_{11}\,\xi^2 + a_{22}\,\eta^2 + a_{33}\,\vartheta^2 + a_{44}) = 0$$

Die Gleichung der zum Punkte $\zeta\ \eta\ \vartheta$ gehörigen Kurve c_5 ist im neuen Systeme:

$$-X = a_{11}\,\xi\,22.33.\frac{(a_{44} + \Sigma\,a_{11}\,\xi^2).11.22.33 + \Sigma\,a_{11}^2\,\xi^2\,22.33}{\lambda\,\Sigma\,a_{11}^2\,\xi^2.22^2.33^2}$$

$$-Y = a_{22}\,\eta\,.11.33\,\varphi$$

$$-Z = a_{33}\,\vartheta\,.11.22\,\varphi;$$ und im alten Systeme:

$$\xi - x = a_{11}\,\xi\,.22.33\,\varphi;\quad \eta - y = a_{22}\,\eta\,.33.11\,\varphi;$$
$$\vartheta - z = a_{33}\,\vartheta\,.11.22.\varphi$$

Ist nun der Punkt $\zeta\ \eta\ \vartheta$ variabel, indem er den Durchmesser $px = qy = rz$ durchläuft, so dass

$\xi : \eta : \vartheta = \frac{1}{p} : \frac{1}{q} : \frac{1}{r}$ und

$\xi = \frac{\mu}{p}$, $\eta = \frac{\mu}{q}$, $\vartheta = \frac{\mu}{r}$ ist, so werden die Kurvengleichungen:

$$\mu - px = a_{11}\,\mu \,.\, 22\,.\,33\,\varphi; \quad \mu - qy = a_{22}\,\mu\,.\,33\,.\,11\,\varphi$$
$$\mu - rz = a_{33}\,\mu\,.\,11\,.\,22\,.\,\varphi$$

$$\varphi = \frac{\left(a_{44} + \mu^2 \Sigma \frac{a_{11}}{p^2}\right) . 11\,.\,22\,.\,33 + \mu^2 \Sigma \left(\frac{a_{11}^2}{p^2} \,.\, 22\,.\,33\right)}{\mu^2 \lambda \Sigma \left(\frac{a_{11}^2}{p_2} \,.\, 22^2 \,.\, 33^2\right)}$$

Für μ und λ als variable Paramenter geben diese drei Relationen die Gleichungen unserer Fläche, die wir mit Ψ bezeichnen wollen.

Dieselben vereinfachen sich durch Vereinigung der Summen im Zähler und durch Reduktion mit μ folgendermassen:

$$\Psi \begin{cases} \mu - px = a_{11} \,.\, 22 \,.\, 33 \,.\, \psi \\ \mu - qy = a_{22} \,.\, 11 \,.\, 33 \,.\, \psi \qquad ii = \lambda - a_{ii} \\ \mu - rz = a_{33} \,.\, 11 \,.\, 22 \,.\, \psi \\ \psi = \dfrac{a_{44} \,.\, 11 \,.\, 22 \,.\, 33 + \lambda\,\mu^2\,\Sigma\left(\frac{a_{11}}{p^2} \,.\, 22 \,.\, 33\right)}{\lambda\,\mu\,\Sigma\left(\frac{a_{11}^2}{p^2} \,.\, 22^2 \,.\, 33^2\right)} \end{cases}$$

Ein Blick auf diese Gleichungen lehrt, dass unsere Ψ sowohl als Ort der Fusspunktkurven c_5 als auch als Ort der Fusspunkthyperbeln h erscheint.

Denn geben wir dem μ der Reihe nach alle möglichen konstanten Werte, so erhalten wir alle Fusspunktkurven c_5; und geben wir dem λ der Reihe nach alle möglichen konstanten Werte, so bekommen wir die Reihe der Hyperbeln

$$x = \frac{k_1\,\mu^2 + k_2}{m\,\mu}, \quad y = \frac{l_1\,\mu^2 + l_2}{m\,\mu}, \quad z = \frac{m_1\,\mu^2 + m_2}{m\,\mu},$$

deren Ort unsere Ψ ist.

Bilden wir die Ψ in eine Ebene durch die Koordinaten λ, μ, ab, so werden die c_5 durch das System der Parallelen μ — konst.

und die h_2 durch das System $\lambda =$ konst. abgebildet, daraus ergibt sich, dass alle h_2 und alle c_5 einander je in einem Punkte schneiden.

Die Gerade $m\lambda + n\mu + p = o$ schneidet die Geraden $\mu =$ konst. und $\lambda =$ konst. in je einem Punkte; sie ist das Bild einer Raumkurve 7. Ordnung auf der Ψ; also gibt es auf Ψ ∞^2 Raumkurven 7. Ordnung, welche die c_5 und h_2 in je einem Punkte schneiden.

Fragen wir nun nach der Ordnung unserer Ψ.

Durch Aufsuchung der gemeinsamen Wurzeln der Zähler und des Nenners in den Gleichungen von Ψ erhalten wir die Fundamentalpunkte der Abbildung, welche auf Ψ nicht Punkten, sondern Linien entsprechen. Diese sind:

1.) und 2.) $\lambda = o \quad \mu = \pm \infty$

3.) — 5.) $\mu = o \quad \lambda = a_{11}, \quad i = 1, 2, 3$

6.) — 13.) $\Sigma \frac{a_{11}^2}{p^2} \cdot 22^2 \cdot 33^2 = o,$

$$a_{44} \cdot 11 \cdot 22 \cdot 33 + \lambda\mu^2 \Sigma \frac{a_{11}}{p^2} \cdot 22 \cdot 33 = o$$

Schreiben wir nun die Gleichungen unserer Ψ folgendermassen:

$$px = \frac{\lambda\mu^2_{\prime} \cdot w_4 - a_{11}\ bc\ v_5}{\lambda\mu\ w_4}; \quad qy = \frac{\lambda\mu^2\ w_4 - a_{22}\ ac\ v_5}{\lambda\mu\ w_4}$$

$$rz = \frac{\lambda\mu^2\ w_4 - a_{33}\ ab\ v_5}{\lambda\mu\ w_4}$$

$v_5 \equiv v_3 + \lambda\mu^2\ v_2 \quad a \equiv \lambda - a_{11}, \quad b \equiv \lambda - a_{22}, \quad c \equiv \lambda - a_{33};$

$w_4 \equiv \Sigma \frac{a_{11}^2}{p^2} b^2c^2, \quad v_2 \equiv \Sigma \frac{a_{11}}{p^2} bc, \quad v_3 \equiv abc.$

Sei ferner eine Gerade gegeben als Durchschnitt der Ebenen:

$\alpha^1\ px + \beta^1\ qy + \gamma^1\ rz + \delta^1 = o$

$\alpha^{11}\ px + \beta^{11} qy + \gamma^{11} rz + \delta^{11} = o,$ so erhalten wir die Punkte $\lambda\ \mu$, in welchen Ψ von dieser Geraden geschnitten wird, durch Auflösung des Systems:

$$\{ w_4 - v_2\ p_2 \}\ \lambda\mu^2 + \delta^1\ w_4\ \lambda\mu - v_3\ p_2 = o$$
$$\{ w_4 - v_2\ q_2 \}\ \lambda\mu^2 + \delta^{11}\ w_4\ \lambda\mu - v_3\ q_2 = o$$

Dabei ist gesetzt worden:

$\left.\begin{aligned} \alpha^1 + \beta^1 + \gamma^1 &= 1 \\ \alpha^{11} + \beta^{11} + \gamma^{11} &= 1 \end{aligned}\right\}$ wodurch der Allgemeinheit kein Eintrag geschieht;

ferner $p_2 \equiv \alpha^1 a_{11} bc + \beta^1 a_{22} ac + \gamma^1 a_{33} ab$

$q_2 \equiv \alpha^{11} a_{11} bc + \beta^{11} a_{22} ac + \gamma^{11} a_{33} ab$

Die Eliminationsdeterminante in λ für dieses System

$$M \equiv \begin{vmatrix} \lambda(w_4 - v_2 p_2) & \delta^1 \lambda w_4 & -v_3 p_2 & 0 \\ 0 & \lambda(w_4 - v_2 p_2) & \delta^1 \lambda w_4 & -v_3 p_2 \\ \lambda(w_4 - v_2 q_2) & \delta^{11} \lambda w_4 & -v_3 q_2 & 0 \\ 0 & \lambda(w_4 - v_2 q_2) & \delta^{11} \lambda w_4 & -v_3 q_2 \end{vmatrix} = 0$$

ist vom 20. Grade; daher ist unsere Ψ von der 7. Ordnung. Wir wollen jedoch sehen, ob vielleicht bei Entwicklung der Determinante sich noch ein paar Fundamentalpunkte zeigen, wodurch Ψ auf die 5. Ordnung reduziert würde.

Einige Umwandlungen der M liefern die Form:

$$M \equiv \frac{\lambda^2 v_3 w_4^2}{v_2} \begin{vmatrix} v_2 (q_2 - p_2) & \delta^1 - \delta^{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\delta^1 - \delta^{11}) \lambda v_2 & p_2 - q_2 \\ w_4 - v_2 q_2 & \delta^{11} & -v_3 & 0 \\ 0 & 1 & \delta^{11} \lambda v_2 & q_2 \end{vmatrix}$$

$$\equiv \lambda^2 v_3 w_4^2 \{ \lambda (\delta' q_2 - \delta'' p_2) [(\delta' - \delta'') w_4 - v_2 (\delta' q_2 - \delta'' p_2)] - (q_2 - p_2)^2 v_3 \} = 0$$

Der Faktor in der grossen Klammer kann zu keiner Wurzel λ führen, die einem Fundamentalpunkt λ entspräche, da jede dieser Wurzeln eine Funktion der Koeffizienten α^1 α^{11} β^1 β^{11} etc. ist, und sich mit Aenderung der betreffenden Geraden ändert, und somit kein weiterer gemeinsamer Punkt der Bilder aller Geraden (ausser den dreizehn $\lambda^2 v_3 w_4^2 = 0$) existiert.

Es ist also Ψ wirklich von der 7. Ordnung und da sie mit Φ die unendlich vielen Kurven h_2 und c_5 gemeinsam hat, so muss Ψ aus Φ und einer Fläche zweiter Ordnung bestehen.

Betrachten wir die Bilder einiger Linien auf Ψ.

1.) Es folgt aus den Gleichungen der Ψ:

$$px - qy = \frac{(a_{22} - a_{11})\, cv_5}{\mu\, w_4}, \quad px - rz = \frac{(a_{33} - a_{11})\, bv_5}{\mu\, w_4}$$

Daher ist das Bild der dreifachen Geraden D

$px - qy = o, \quad px - rz = o \quad$ offenbar $v_5 = o.$

2.) Ferner ist:

$$px = \frac{\lambda\mu^2 w_4 - a_{11}\, bcv_5}{\lambda\mu\, w_4}$$

$$qy - rz = \frac{(a_{33} - a_{22})\, a v_5.}{\mu w_4}$$

Die letzten Gleichungen haben rechts keinen gemeinsamen Faktor, daher kann nur für einzelne Werte von λ, μ $px = o = qy - rz$ werden, also wird die Projektion der dreifachen Geraden D auf die YZ Ebene (und auf jede andere Symmietrieebene) durch einen Fundamentalpunkt dargestellt.

3.) Analoges gilt für jede der drei Hauptaxen, z. B. für:

$$px = \frac{\lambda\mu^2 w_4 - a_{11}\, bcv_5}{\lambda\mu\, w_4} = o$$

$$qy = \frac{\lambda\mu^2 w_4 - a_{22}\, acv_5}{\lambda\mu\, w_5} = o$$

4.) Welche Fundamentalpunkte dieses seien, ergibt sich, wenn wir endlich noch die Durchschnitte des Ebenenbüschels

$m(px - qy) + n(px - rz) = o$ mit der Ψ betrachten.

Die Bilder derselben sind:

$$\frac{v_5}{\mu w_4}\{m(a_{22} - a_{11})c + n(a_{33} - a_{11})b\} = o$$

$v_5 = o$ ist das Bild der in allen Ebenen des Büschels liegenden dreifachen Geraden D; der Faktor in der grossen Klammer ist von der Form $\lambda =$ konst. und bildet die Fusspunkthyperbeln unseres Büschels und nur diese ab; denn setzen wir für λ einen konstanten Wert in den Gleichungen der Ψ ein, so erhalten wir:

$$x = \frac{k_1\mu^2 + k_2}{m\mu}, \quad y = \frac{l_1\mu^2 + l_2}{m\mu}, \quad z = \frac{m_1\mu^2 + m_2}{m\mu},$$

welche Gleichungen für konstante Werte der k, l, m, nur eine Hyperbel darstellen.

Setzen wir nun $n = o$, so sehen wir, dass $c = o$ das Bild der Hyperbel in der Ebene $px - qy = o$ sei, und mit Berücksichtigung des früher Gesagten und Nr. 3 folgt, dass $\lambda = a_{33}$ $\mu = o$ der Fundamentalpunkt ist, durch welchen die ZAxe und die Projektion der dreifachen Geraden auf die XY Ebene abgebildet wird.

Analog entspricht:

Dem Punkte $\lambda = a_{22}$ $\mu = o$ die Y Axe und die Projektion von D auf die XZ Ebene.

Dem Punkte $\lambda = a_{11}$ $\mu = o$ die X Axe und die Projektion von D auf die XZ Ebene.

Da kein Faktor mehr übrig ist, um noch weitere Durchschnittskurven der Ebenen unseres Büschels abzubilden, so kann Ψ sich von Φ nicht um eine reelle Oberfläche 2. Ordnung unterscheiden, sondern dieselbe ist imaginär; (sie ist nicht im Unendlichen gelegen, weil sonst der in der grossen Klammer stehende Faktor der Determinante M Seite 47 für jeden Wert von α^1 α^{11} β^1 β^{11} etc. sich auf den 5. Grad reduzieren müsste).

Wir wollen diesen Abschnitt nicht beschliessen, ohne noch einiges über den bemerkenswerten Fall anzudeuten, in welchem unsere Φ in eine Fläche 3. Ordnung degeneriert.

Wenn nämlich der Durchmesser d in einer Symmetrieebene γ liegt, so zerfallen alle Komplexkegel in je zwei Strahlenbüschel 1. O., alle Raumkurven c_5 in je einen Kreis und eine ebene Kurve 3. Ordnung. Von der Φ_5 löst sich zweimal die Symmetrieebene γ ab. Denn jeder Punkt der γ ist Fusspunkt von 2 zu einander senkrechten in ihr gelegenen Axen; durch diese Punkte wird also γ zweimal überdeckt. Auf der übrig bleibenden Φ_3 liegen die Kreise, welche die ebenen c_3 zu den c_5 des allgemeinen Falles ergänzen. Betrachten wir diese Kreise genauer. Denken wir uns durch zwei Punkte A und B (Fig. 2) auf d jene Lotebenen α und β gelegt, deren zweite Strahlenbüschel von Axen ihre Zentra in A und B haben. (Ihre ersten Axenbüschel haben den unendlich fernen Pol von γ zum Zentrum.) Denken wir uns ferner durch d eine Ebene δ gelegt, so schneidet die δ die α und β notwendig in Axen, und diese Axen sind als in einer Durchmesserebene gelegen, notwendig einander parallel. Daher sind alle Kreisschnitte der Φ einander parallel. Ist A ein Schnittpunkt der d mit der Fokalkurve, so geht die Ebene des Kreisschnittes durch die Normale n an die Fokalkurve, und der Kreisschnitt reduziert sich auf den Punkt A. Es hat also die Φ_3 zwei Doppelpunkte, wenn d die Fokalkurve in reellen Punkten schneidet.

Betrachten wir den zu dieser Lotebene parallelen Schnitt ε_0 durch O, so ist der Kreis unendlich gross geworden, und die Hauptaxe OZ ist der im Endlichen befindliche Teil dieses Kreises. Diese Ebene ε_0 berührt die Φ_3 längs der unendlich fernen Geraden, während alle anderen Kreisschnittebenen die Φ_3 in der nämlichen unend-

lich fernen Geraden schneiden, da sie die unendlich fernen Fusspunkte der Durchmesser in der Ebene ε_0 enthalten. Rückt die Kreisschnittebene ε ins Unendliche, so erhalten wir über ihren Fusspunktkreis Aufschluss, wenn wir zuerst die Schnitte des Ebenenbüschels d betrachten, dessen Ebenen δ heissen mögen.

(Fig. 3.) Diese Schnitte bestehen aus d und aus gleichseitigen Hyperbeln, deren Zentrum in O liegt und die alle durch die Doppelpunkte A der Φ gehen. Denn die Normalebene α zum Fokalkegelschnitt k schneidet die Ebene δ in einer Axe, die ihren Fusspunkt in A hat, also gehört A zur Fusspunkthyperbel jeder Ebene δ. Die Asymptoten dieser Hyperbeln berühren die Φ_3 in ihrer unendlich fernen Kurve, welche, weil in der Ebene ε_0 enthalten, ein Kreis ist. Daher besteht der Asymptotenkegel der Φ_3 1.) aus einer Lotebene durch OZ parallel zur Normalen durch A an k, 2.) aus einem Kreiskegel, von den Asymptoten der Hyperbeln gebildet. — Wird δ zur Lotebene auf γ, so degeneriert die Hyperbel in OZ und d, und δ berührt die Φ längs d. Jede Hyperbel schneidet jeden Kreis in einem endlichen Punkte, weil die Schnitte jeder Ebene δ mit jeder Kreisschnittebene ε aus je einer Axe mit einem Fusspunkte bestehen.

Betrachten wir nun den Schnitt der Symmetrieebene σ mit Φ_3.

Sei f (Fig. 4) der Durchschnitt der Durchmesserebene δ mit der Kreisschnittebene α durch den Doppelpunkt A. Liegt δ unendlich nahe an σ, so rückt f unendlich nahe an $\sigma\alpha \equiv a$. Es ist aber f immer einer Asymptote der Fusspunkthyperbel in δ parallel. Diese Asymptote geht immer durch O. Daher muss der Schnitt der σ mit Φ_3 auch eine gleichseitige Hyperbel sein, deren eine Asymptote parallel zur Normale an die Fokalkurve in ihrem Durchschnitte A mit d ist, während die andere parallel zur Tangente in A an k ist.

Nun können wir auch genaueres über die Ebenen α der Kreisschnitte von Φ_3 sagen.*)

Dieselben sind einer Asymptote m der Durchschnittshyperbel in σ parallel. Verschieben wir α, so dass es die Verlängerung von OA schneidet, so ist der Kreisdurchmesser stets parallel zu m und begrenzt durch einen endlichen Hyperbelpunkt und einen Punkt von d. Diese Kreise nehmen also mit der Entfernung von O ins Unendliche zu. (Fig. 5.)

Nähern wir uns von A aus dem Punkte O, so wachsen die Kreise ebenfalls fortwährend, bis sie bei O in die zu δ senkrechte Hauptaxe ausarten. Die Lotebene durch die zweite Asymptote n teilt die Φ in zwei kongruente Teile.

---

*) Ueber den schraffierten Teil der σ in Figur 5 (resp. 6) wölben sich die Kreisschnitte unserer Fläche. (σ in Fig. 4 = γ in Fig. 3.)

Wenn d (Fig. 6) die Fokalkurve nicht schneidet, so schneidet d auch nicht den in der Symmetrieebene gelegenen Hyperbelschnitt, die Fläche hat keinen Doppelpunkt, die Kreisdurchmesser gehen nur bei O von der einen auf die andere Seite der d über.

§ 7.

Anhang.

Allgemeines über Kurven, deren Koordinaten rationale Funktionen eines Parameters sind.

Die Charaktere unikursaler ebener Kurven hat zuerst Clebsch in Crelle's Journal Nro. 64 Seite 44 bestimmt. Korndörffer hat in den mathematischen Annalen, 3. Band über die rationalen Raumkurven geschrieben, dabei aber nach kurzer Einleitung Problemen der Integralrechnung sich zugewendet. Die Raumgeometrie von Salmon-Fiedler 3. Aufl. leitet im 2. Bd. S. 111 die Charaktere der rationalen Raumkurven durch das Prinzip der eindeutigen algebraischen Korrespondenz ab. Hermite, cours d'analyse, Seite 250 liefert einen neuen Beweis, dass rationale ebene Kurven die Maximalzahl von Doppelpunkten besitzen.*) Für diesen Satz sowohl als auch für einige andere sollen im folgenden neue Beweise mitgeteilt werden.

1. Eine rationale ebene Kurve r^{ter} Ordnung hat $\frac{1}{2}(r-1)(r-2)$ Doppelpunkte.

Sei $x = \frac{a_0 \lambda^r + a_1 \lambda^{r-1} + \ldots a_r}{c_0 \lambda^r + \ldots c_r} \equiv \frac{f_1 \lambda}{\varphi \lambda}$

$y = \frac{b_0 \lambda^r + \ldots b_r}{c_0 \lambda^r + \ldots c_r} \equiv \frac{f_2 \lambda}{\varphi \lambda}$

und $x = \xi$, $y = \eta$ ein Doppelpunkt unserer Kurve, so hat

$$x - \xi \equiv X = \frac{f_1 - \xi\varphi}{\varphi}, \quad y - \eta \equiv Y = \frac{f_2 - \eta\varphi}{\varphi}$$

im Anfange einen Doppelpunkt $\lambda = \alpha$ $\lambda = \beta$ und daher haben dann die Zähler von X und Y einen gemeinsamen Teiler $\lambda^2 + p\lambda + q \equiv (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)$. Es ist dann ferner:

*) Dieser Beweis wird durch Verwandlung der auftretenden Funktionen in Partialbrüche geführt, wodurch der Beweis sich sehr elegant gestaltet; jedoch ist für denselben die Benützung der Partialbrüche nicht wesentlich.

$$f_1 - \xi \cdot \varphi \equiv (a_0 - c_0\xi)\ \lambda^r + \ldots\ (a_k - c_k\xi)\ \lambda^{r-k} + \ldots (a_r - c_r\xi)$$
$$\equiv (\lambda^2 + p\lambda + q)\ (m_0\ \lambda^{r-2} + \ldots\ldots\ m_{r-2})$$
$$\equiv m_0\lambda^r + (m_1 + pm_0)\ \lambda^{r-1} + \ldots$$
$$+ (m_k + pm_{k-1} + qm_{k-2})\ \lambda_{r-k} \ldots\ldots\ldots + qm_{r-2}$$

Daraus ergeben sich die Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned}
&a_0 - c_0\xi - m_0 &&= 0\\
&a_1 - c_1\xi - pm_0 - m_1 &&= 0\\
&a_2 - c_2\xi - qm_0 - pm_1 - m^2 &&= 0\\
&a_3 - c_3\xi \quad - qm_1 - pm_2 - m_3 &&= 0\\
&\cdot\\
&\cdot\\
&\cdot\\
&a_r - c_r\xi \quad - qm_{r-2} &&= 0
\end{aligned}$$

Die Koexistenz dieser $r+1$ Gleichungen mit den r Unbekannten ξ, m_0, m_1, . . . m_{r-2} hängt vom Verschwinden einer (leicht zu bildenden) Determinante D_1 ab, die bezüglich p und q vom Grade $r-1$ ist, und bei der Existenz eines Doppelpunktes $\xi\eta$ erhalten wir noch eine zweite verschwindende Determinante D_2, welche aus D_1 hervorgeht, wenn man die a durch b ersetzt. Für ein die Gleichungen $D_1 = D_2 = 0$ erfüllendes Wertepaar p, q gibt das obige Gleichungssystem und das analoge aus b und η gebildete einen durch lineäre Gleichungen bestimmten Doppelpunkt, nur gewisse Wertepaare sind ausgenommen.

Es werden nämlich D_1 und D_2 auch annulliert, wenn man p und q so wählt, dass $\lambda^2 + p\lambda + q$ ein Faktor von $\varphi(\lambda)$ ist, und solche Werte entsprechen offenbar nicht Doppelpunkten, sondern unendlich fernen Punkten der in rede stehenden Kurven.

Dass die erwähnten Wertepaare pq Lösungen der Gleichungen $D_1 = D_2 = 0$ sind, ersieht man folgendermassen:

Sei $\varphi(\lambda) \equiv c_0\ \lambda^r + \ldots\ c_k\lambda^{r-k} + \ldots\ c_r$
$$\equiv (\lambda^2 + p\lambda + q)\ (n_0\ \lambda^{r-2} + \ldots\ n_{r-2})$$
$$\equiv n_0\ \lambda^r + (n_1 + pn_0)\lambda^{r-2} + (n_2 + pn_1 + qn_0)\lambda^{r-3}$$
$$\ldots\ldots + qn_{r-2},$$

so ist durch die Unbekannten n_0, n_1 . . . n_{r-2} folgendes Systems von $r+1$ Gleichungen zu befriedigen:

$$\left\{\begin{array}{l} c_0 - n_0 = 0 \\ c_1 - pn_0 - n_1 = 0 \\ c_2 - qn_0 - pn_1 - n_2 = 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_k \ldots - qn_{k-2} - pn_{k-1} - n_k = 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_r \quad \ldots \quad - qn_{r-2} = 0 \end{array}\right.$$

Wenn diese r + 1-Gleichungen koexistieren, so sind auch beliebige r derselben gleichzeitig erfüllt und sämtliche Determinanten verschwinden, welche man durch Streichung irgend einer Horizontalreihe in den Schema

$$\left|\begin{array}{cccccccccc} c_0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & & & & & 0 \\ c_1 & p & 1 & 0 & & & & & & 0 \\ c_2 & q & p & 1 & & & & & & 0 \\ \cdot & & & & & & & & & \\ \cdot & & & & & & & & & \\ \cdot & & & & & & & & & \\ \cdot & & & & & & & & & \\ \cdot & & & & & & & & & \\ c_k & 0 & \ldots & \ldots & q & p & 1 & \ldots & & 0 \\ \cdot & & & & & & & & & \\ \cdot & & & & & & & & & \\ \cdot & & & & & & & & & \\ c_r & 0 & & & & & & & q & \end{array}\right|$$

erhält. Diese sind aber die Minoren der je nach der ersten Vertikalreihe entwickelten Determinanten D_1 und D_2, welch letztgenannten daher verschwinden, wenn alle die obigen gleichzeitig zu Null werden. Man sieht also, dass das System $D_1 = D_2 = 0$ die

$\frac{r(r-1)}{2}$ Lösungen $p = -(\alpha+\beta)$ $q = \alpha\beta$ besitzt, wenn unter α und β alle möglichen Wurzelpaare von $\varphi(\lambda) = o$ verstanden werden. Daher entsprechen den $(r-1)^2$ Lösungen $D_1 = D_2 = o$

nur $(r-1)^2 - {}^1/_2\,(r-1)r$

$= {}^1/_2\,(r-1)\,(r-2)$ Doppelpunkte der Kurve.

2.) Eine rationale Raumkurve mit k Spitzen hat $4(r-3) - 3k$ stationäre Ebenen.

Die Schnittpunkte der Ebene $E \equiv px + qy + sz + t = o$ mit unserer Kurve bestimmen sich durch jene Werte von λ, welche die Wurzeln der Gleichung $pf_1 + qf_2 + sf_3 + t\varphi = o$ sind. Diese hat die Form: 1.) $k_0\,\lambda^r + \ldots k_\varrho\,\lambda^{r-\varrho} + \ldots k_r = o$

wobei $k_\varrho \equiv a_\varrho p + b_\varrho q + c_\varrho s + d_\varrho t$

Berührt nun E im Punkt $\lambda = -\alpha$ stationär, so ist die Form 1.) identisch mit

2.) $(\lambda+\alpha)^4\,(\lambda^{r-4} + u_1\,\lambda^{r-5} + \ldots u_{r-5}\lambda + u_{r-4}$

Für die r Grössen $p, q, s, t, u_1, u_2 \ldots u_{r-4}$ liefert die Gleichsetzung der Koeffizienten in 1.) und 2.) $r+1$ Gleichungen, bei deren Koexistenz folgende Determinante verschwindet:

$$\begin{vmatrix}
a_r, & b_r, & c_r, & d_r, & -\alpha_4 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
a_{r-1}, & \ldots & d, & -4\alpha^3, & -\alpha^4, & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\
a_{r-2}, & \ldots & d, & -6\alpha^2, & -4\alpha^3, & -\alpha^4, & \ldots & \ldots & 0 \\
a_{r-3}, & \ldots & & -4\alpha, & -6\alpha^2, & -4\alpha^3, & -\alpha^4, & \ldots & 0 \\
a_{r-4}, & \ldots & & -1, & -4\alpha, & -6\alpha^2, & -4\alpha^3, & -\alpha^4 \ldots & 0 \\
 & \text{etc.} & & 0 & -1 & -4\alpha & \text{etc.} & \ldots & 0 \\
\vdots & & & & & & & & \\
a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & 0 & \ldots & \ldots & -1 & -4\alpha \\
a_0 & b_0 & c_0 & d_0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & -1
\end{vmatrix} = 0$$

Für jede Wurzel α ist eine stationäre Schmiegungsebene bestimmt, deren Koordinaten p q s t man erhält, wenn man in dem vorhergehenden Gleichungssysteme eine Gleichung weglässt, den Wert von α in die übrigen einsetzt, und dann die Unbekannten p, q, s, t auf gewöhnliche Art bestimmt. Nun ist unsere Determinante D hinsichtlich α vom Grade 4 $(r - 3)$, und dies ist auch die Anzahl der stationären Ebenen, wenn unsere Kurve keine Rückkehrpunkte hat.

Wenn ein Rückkehrpunkt vorhanden ist, und wir wählen denselben zum Koordinantenanfang, so werden $f_1\ f_2\ f_3$ von der Form $(\lambda + m)^2 v_1$, $(\lambda + m)^2 v_2$, $(\lambda + m)^2 v_3$; wird ferner die Substitution $\rho = (\lambda + m)$ ausgeführt, wodurch Koordinatensystem und Kurve nicht alteriert werden, so wird in den neuen Funktionen $f_1\ f_2\ f_3$: $a_r = b_r = c_r = a_{r-1} = b_{r-1} = c_{r-1} = 0$

Das konstante Glied der Determinante D ist:

$$\pm \begin{vmatrix} a_r & b_r & c_r & d_r \\ & . & . & . \\ a_{r-1} & & & \\ & . & . & . \\ a_{r-2} & & & \\ & . & . & . \\ a_{r-3} & & & d_{r-3} \end{vmatrix}$$

und verschwindet unter obiger Voraussetzung.

Von den Gliedern (-4α) wird im allgemeinen Fall nur jenes mit einem konstanten, von Null verschiedenen Faktor multipliziert, welches in der fünften Kolonne steht, dieser Faktor ist ein Aggregat aus dem in dem Systeme

$$\left\| \begin{matrix} a_r & b_r & c_r & d_r \\ a_{r-1} & . & . & . \\ a_{r-2} & . & . & . \end{matrix} \right\|$$

enthaltenen Determinanten, welche sämtlich gleich Null sind, wenn die Kurve im Anfange eine Spitze hat. Unter den konstanten Faktoren von $(-4\alpha) \times (-4\alpha)$ ist nur jener von Null verschieden, welcher den Gliedern in der fünften und sechsten Kolonne zugehört; derselbe ist auch das eben erwähnte Determinantenaggregat.

Unter den konstanten Faktoren von $(-6\alpha^2)$ ist nur der dem Gliede in der fünften Kolonne zugehörige von Null verschieden,

nämlich das Aggregat:

$$\pm \begin{Vmatrix} a_r & b_r & c_r & d_r \\ a_{r-1} & . & . & . \\ a_{r-3} & . & . & d_{r-3} \end{Vmatrix}$$

welches im speziellen Falle einer Spitze auch verschwindet.

Hingegen ist der Koeffizient von $(-4\alpha^3)$, nämlich

$$\pm \begin{Vmatrix} a_r & b_r & c_r & d_r \\ a_{r-2} & . & . & . \\ a_{r-3} & . & . & d_{r-3} \end{Vmatrix}$$

wohl von Null verschieden, auch wenn $a_r = b_r = c_r = a_{r-1}$ etc. gleich Null ist.

Es hat also im Falle eines Rückkehrpunktes die Gleichung $D = 0$ drei Wurzeln $\alpha = 0$, welchen die neue Schmiegungsebene im Rückkehrpunkte entspricht. Ist daher k die Anzahl der Spitzen, so hat unsere Kurve $4(r-3) - 3k$ stationäre Ebene.

Auf einem dem obigen ganz analogen Wege erfährt man, dass die rationale ebene Kurve $x = \frac{f_1}{\varphi} \quad y = \frac{f_2}{\varphi} \quad 3(r-2) - 2k$ Inflexionspunkte ι hat. Unter der Benützung der Plücker'schen Gleichung

$$\iota = 3r\ (r-2) - (6\delta + 8k)$$

folgt: $(\delta + k) = \frac{1}{2}(r-2)(r-1)$ und ist abermals ein neuer Beweis für den Satz gewonnen, dass rationale Kurven die grösstmögliche Anzahl von Doppelpunkten besitzen.

3.) Um die Klasse der Raumkurve, d. h. die Zahl der Tangentialebenen durch eine gegebene Gerade zu bestimmen, transformieren wir so, dass diese Gerade die Z Axe wird, dann ist die Gleichung aller Ebenen durch dieselbe: $px + qy = 0$. Die Durchsnitte dieser Ebenen ergeben sich aus:

$$p f_1 + q f_2 = 0 \text{ oder}$$

$$(p a_0 + q b_0)\lambda^r + \ldots . (p a_\varrho + q b_\varrho)\lambda^{r-\varrho} + \ldots (p a_r + q b_r) = 0$$

Wenn nun die Ebene Tangentialebene ist, so hat die letzte Gleichung zwei Wurzeln $\lambda - \gamma$ und ist von der Form:

$$\lambda^2 + 2\lambda\gamma + \gamma^2)(\lambda^{r-2} + m_1\lambda^{r-3} + \ldots . m_{r-2}) = 0$$

Durch Gleichsetzung der Koeffizienten ergeben sich $(r+1)$ Bedingungsgleichungen für die r Unbekannten $p_1\ q_1\ m_1\ m_2 \ldots . m_{r-2}$. Daher muss die Determinante E des Systems verschwinden, welche

vom $(2r-1)^{\text{ten}}$ Grade in bezug auf γ ist. Für jede Wurzel γ von E erhalten wir eine Tangentialebene durch die Z Axe, deren Koordinaten p, q durch ein lineäres Gleichungssystem eindeutig bestimmt sind.

Die Anzahl dieser $(2r-1)$ Ebenen reduziert sich aber für jede Spitze der Kurve um eins. Denn wenn wir durch die Spitze $\lambda = \alpha$ und durch die Z Axe eine Ebene M legen, so hat die Gleichung der Kurvenpunkte in M die Doppelwurzel $\lambda = \alpha$, weil ja M diesen Punkt zweimal enthält. Daher tritt die Ebene M unter den vorerwähnten Tangentialebenen auf und ist von diesen in Abrechnung zu bringen. Daher ist die Klasse einer Kurve mit k Spitzen

$$2(r-1) - k$$

Lässt man p und q als Koordinaten aller Geraden durch den Anfangspunkt in einer Ebene gelten, so lehrt buchstäblich dieselbe Entwicklung, dass die Klasse der ebenen rationalen Kurve

$$x = \frac{f_1}{\varphi} \quad y = \frac{f_2}{\varphi} \text{ ebenfalls } 2(r-1) - k \text{ ist.}$$

Wenn von einer rationalen Raumkurve die Anzahl der Spitzen gegeben ist, so lassen sich aus den drei im Vorhergehenden gefundenen Anzahlen (scheinbare Doppelpunkte, deren Anzahl gleich den wirklichen einer ebenen Projektion ist; stationäre Ebenen, Tangentialebenen durch eine Gerade) die übrigen Charaktere bestimmen.

4.) Die Zahl der Schmiegungsebenen durch einen Punkt finden wir in folgender Weise:

Wählen wir den Punkt zum Anfange der Koordinaten, wobei die Kurve rational bleibt, so ist die Gleichung aller Ebenen durch den Anfang:

$E \equiv px + qy + sz = o$ und die Gleichung der Kurvenpunkte in dieser Ebene:

1.) $E \equiv pf_1 + q\,f_2 + s\,f_3 = o$

$\equiv (pa_0 + qb_0 + sc_0)\,\lambda^r + \ldots (pa_\varrho + qb_\varrho + sc_\varrho)\,\lambda^{r-\varrho} + \ldots$

Ist dies eine Schmiegungsebene im Punkte $\lambda = -\gamma$, so ist:

2. $E \equiv (\lambda^3 + 3\lambda^2\gamma + 3\lambda\gamma^2 + \gamma^3)\,(m_0\lambda^{r-3} + m_1\lambda^{r-4} + \ldots\ m_{r-3})$

Die Identität der beiden Gleichungsformen 1.) und 2.) gibt zu einem Gleichungssystem zwischen der $(r-1)$ Unbekannten

$m_0, m_1, m_2 \ldots m_{r-3}$, p, q, s in r — 1 honogenen Gleichungen Veranlassung, für deren Koexistenz die Bedingung existiert:

$$\begin{vmatrix} a_r & b_r & c_r & -\gamma^3 & 0 & \ldots & & & & & \\ a_{r-1} & b_{r-1} & c_{r-1} & -3\gamma^2 & -\gamma^3 & 0 & \ldots & & & & \\ a_{r-2} & b_{r-2} & c_{r-2} & -3\gamma & -3\gamma^2 & -\gamma^3 & 0 & \ldots & & & \\ a_{r-3} & b_{r-3} & c_{r-3} & -1 & 3\gamma & -3\gamma^2 & -\gamma^3 & 0 & \ldots & & \\ a_{r-4} & b_{r-4} & c_{r-4} & 0 & -1 & 3\gamma & -3\gamma^2 & -\gamma^3 & 0 & \ldots & \\ \ldots & \ldots & \ldots & & & & & & & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & & & & & & & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & & & & & & & & \end{vmatrix} = 0$$

Diese Determinante ist hinsichtlich γ vom Grade 3 (r — 2) und dies ist auch die Zahl der Schmiegungsebenen durch einen Punkt.

Buchstäblich dieselbe Entwicklung lehrt, dass die Zahl der Inflexionspunkte einer ebenen rationalen Kurve 3 (r — 2) sei, wenn man p, q, s, als Koordinaten einer beliebigen Geraden in der Kurvenebene betrachtet; (confer Seite 55), setzt man noch $a_r = b_r = a_{r-1} = b_{r-1} = 0$, so erhält man noch den Subtrahenden 2 k, wenn die Kurve k Spitzen hat. Im ersterwähnten Falle der Raumkurve aber kann $a_r = b_r = c_r = a_{r-1} = b_{r-1} = c_{r-1} = 0$ gesetzt werden, wenn der Anfang der Koordinaten eine Spitze ist; dann hat jene niedrigste Potenz von γ einen von Null verschiedenen Koeffizienten, welcher entsteht, wenn man aus der ersten und zweiten Horizontalreihe die möglichst niedrigen Potenzen von γ und sonst lauter konstante Glieder wählt. So erhält man $(-\gamma^3)(-\gamma^3) = \gamma^6$ als niedrigste Potenz; und man sieht, dass durch eine Spitze der Kurve um 5 Schmiegungsebenen weniger an dieselbe gehen als durch einen ausserhalb der Kurve liegenden Punkt.

INHALT.

Seite

Einleitung 3

Gleichungen der Kurve 4

Diskussion der Kurve aus ihren Gleichungen 6

Von den Flächen auf welchen die Kurve liegt 22

Synthetische Betrachtung der Kurve 33

Ueber den Ort der Raumkurven, deren Axenkegel ihre Spitzen auf einem Durchmesser der konfokalen Flächen haben 35

Allgemeines über Kurven, deren Koordinaten rationale Funktionen eines Parameters sind 51